

Министерство общего и профессионального образования РФ

---

Государственный Санкт-Петербургский электротехнический  
университет «ЛЭТИ» имени Ульянова-Ленина

Кафедра ТОЭ

**Пояснительная записка к курсовой работе  
по теории электрических цепей**

**«Исследование характеристик линейных электрических  
цепей»**

Выполнил:

Группа:

Факультет:

Кафедра:

Вариант: 06

Руководитель:



## Оглавление

Цель работы.....	4
Техническое задание.....	4
1. Нормирование параметров и переменных цепи.....	5
2. Определение передаточной функции цепи .....	6
3. Расчет частотных характеристик цепи .....	8
4. Составление уравнений состояния цепи.....	12
5. Определение переходной и импульсной характеристик.....	15
6. Вычисление реакции цепи при воздействии одиночного импульса на входе.....	21
7. Определение спектральных характеристик одиночного импульса воздействия.....	23
8. Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе на входе.....	26
9. Определение спектра периодического входного сигнала.....	27
10. Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии.....	29
Заключение.....	31
Список использованной литературы.....	33

## Цель работы

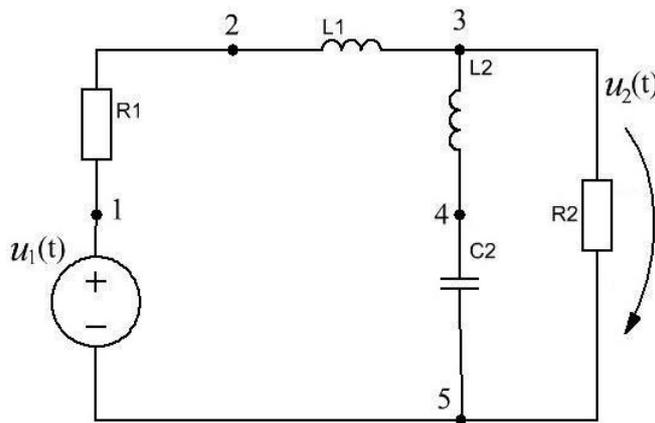
Практическое освоение различных методов анализа во временной и частотной областях характеристики цепей и искажений проходящих через цепи сигналов.

## Техническое задание

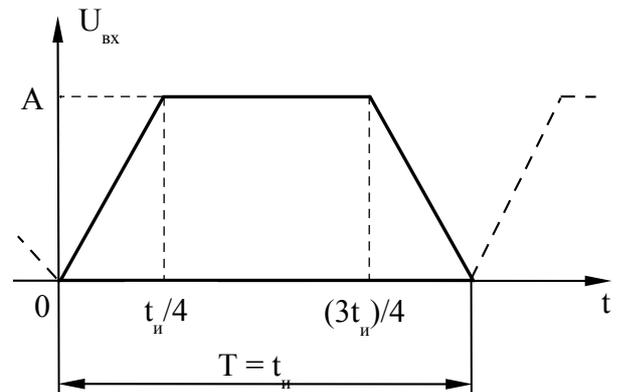
Из [3, стр. 4, 5]: на вход электрической цепи, представленной на *Рис. Т.1*, с момента  $t = 0$  подается импульс напряжения  $u_1(t)$ . Реакцией цепи является напряжение  $u_2(t) = u_{R2}$ . График импульса представлен на *Рис. Т.2*.

Параметры цепи: 115 -  $R_1$ , 212 -  $R_1 = 3,6 \text{ кОм}$ , 324 -  $L_1 = 6 \text{ мГн}$ , 434 -  $L_2 = 9 \text{ мГн}$ , 545 -  $C_2 = 1236 \text{ нФ}$ , 635 -  $R_2 = 3,6 \text{ кОм}$ .

Параметры импульса:  $U_m = 100 \text{ В}$ ,  $t_{и} = T = 62,8 \text{ мкс}$ .



*Рис. Т.1.* Схема цепи



*Рис. Т.2.* Входной импульс

В процессе работы требуется определить основные характеристики цепи и исследовать реакцию цепи при действии на входе одиночного импульса и периодического сигнала.

Примечание: при выполнении данной курсовой работы для разного рода аналитических и численных расчетов применялся математический пакет **MathCAD 11**.

## 1. Нормирование параметров и переменных цепи

Нормирование параметров и переменных цепи произведем в целях облегчения процессов вычисления, в которых они используются. Суть нормирования заключается в сближении порядков значений параметров и переменных цепи. Для нормировки будем использовать следующие формулы [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_* = \frac{t}{t_\sigma} ; \quad \omega_* = \frac{\omega}{\omega_\sigma} , \quad t_{i*} = \frac{t_i}{t_\sigma} , \quad T_* = \frac{T}{t_\sigma} \\ R_* = \frac{R}{R_\sigma} ; \quad L_* = \frac{L\omega_\sigma}{R_\sigma} ; \quad C_* = C\omega_\sigma R_\sigma \end{array} \right.$$

где:

- величины с индексом «звездочка» - есть пронормированные величины;
- величины с индексом «сигма» - это те величины, по которым производится нормировка (базисные величины). Примем базисные величины следующими:

$$t_\sigma = 10^{-6} \text{ с} , \quad \omega_\sigma = 10^6 \text{ с}^{-1} \quad (\text{поскольку время импульса имеет размерность «мкс»})$$

$$R_\sigma = R_n = R_2 = 3,6 \text{ кОм}$$

Произведем нормирование параметров цепи согласно указанным выше условиям (все полученные величины - безразмерные):

$$R_{1*} = R_{2*} = 1$$

$$L_{1*} = \frac{L_1 \omega_\sigma}{R_\sigma} = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{3,6 \cdot 10^3} = 4,444$$

$$L_{2*} = \frac{L_2 \omega_\sigma}{R_\sigma} = \frac{9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{3,6 \cdot 10^3} = 2,5$$

$$t_{i*} = T_* = 62,8$$

В дальнейшем, в целях упрощения записей, все величины будем полагать нормированными и поэтому символ «звездочка» в индексе величин указывать не будем.

## 2. Определение передаточной функции цепи $H(s)$

Согласно [1, стр. 156] *передаточной функцией цепи* называют отношение изображения реакции к изображению единственного в цепи воздействия при нулевых независимых начальных условиях. В нашем случае передаточная функция цепи имеет вид:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Для определения передаточной функции построим операторную схему замещения цепи (Рис. 2.1). Проведем машинный расчет передаточной функции цепи:

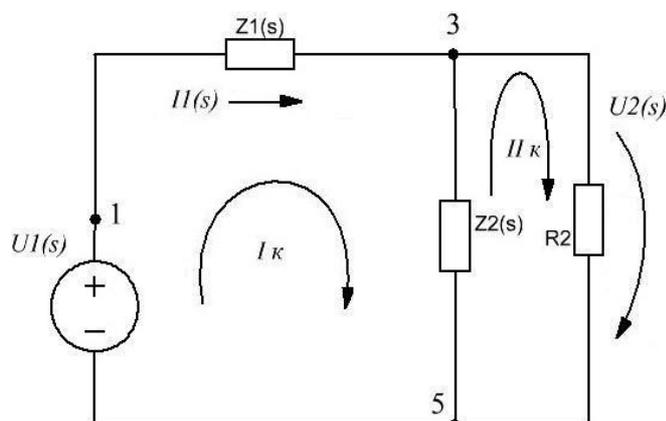


Рис. 2.1. Операторная схема цепи

Параметры операторной схемы:

$$Z1(s) = R_1 + L_1 \cdot s \quad Z2(s) = L_2 \cdot s + \frac{1}{C_1 \cdot s}$$

Операторное сопротивление цепи относительно входного сигнала:

$$Z(s) = Z1(s) + \frac{R_2 \cdot Z2(s)}{R_2 + Z2(s)}$$

Входной ток цепи:

$$I1(s) = \frac{U1(s)}{Z(s)}$$

ЗНК для контура 1:

$$U2(s) = I1(s) \cdot R2 = H(s) \cdot Z1(s)$$

Выражение передаточной функции цепи:

$$H(s) = \frac{U2(s)}{U1(s)} \Bigg|_{\substack{\text{simplify} \\ \text{collect, s}}} \rightarrow \frac{45}{2} \cdot \frac{2781s^2 + 250}{50029s + 236385s^2 + 11250 + 278100s^3}$$

Полиномы числителя и знаменателя передаточной функции соответственно:

$$Q(s) = R_2 \cdot (L_2 \cdot C_1 \cdot s^2 + 1) \rightarrow \frac{2781}{250} \cdot s^2 + 1$$

$$R(s) = L_1 \cdot s^3 \cdot L_2 \cdot C_1 + (R_1 \cdot L_2 \cdot C_1 + R_2 \cdot L_2 \cdot C_1 + L_1 \cdot R_2 \cdot C_1) \cdot s^2 + (R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + L_1) \cdot s + R_1 + R_2$$

$$R(s) \rightarrow \frac{1236}{25} \cdot s^3 + \frac{5253}{125} \cdot s^2 + \frac{50029}{5625} \cdot s + 2$$

Нули передаточной функции определяются как корни полинома ее числителя Q(s):

Вектор коэффициентов полинома числителя ПФ:

$$B = Q(s) \text{ coeffs, } s \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2781}{250} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11.124 \end{pmatrix}$$

Нули передаточной функции:

$$\text{Zero} = \text{polyroots}(B) \quad \text{Zero} = \begin{pmatrix} -0.3i \\ 0.3i \end{pmatrix}$$

Вычислим теперь полюсы полученной передаточной функции (собственные частоты цепи). Согласно [1, стр. 157] они являются корнями характеристического полинома ее знаменателя. Произведем машинный расчет корней и изобразим их на комплексной плоскости (Рис. 2.2):

Полюсы передаточной функции:

$$\text{Pole} = \text{polyroots}(A) \quad \text{Pole} = \begin{pmatrix} -0.672 \\ -0.089 - 0.229i \\ -0.089 + 0.229i \end{pmatrix}$$

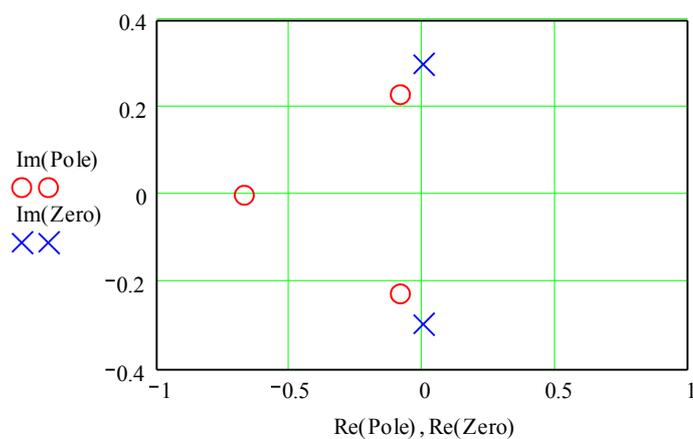


Рис. 2.2. Карта нулей и полюсов передаточной функции.

Оценим практическую длительность переходных процессов:

$$\tau_{\min} = \frac{1}{|\operatorname{Re}(\text{Pole}_1)|}$$

$$\tau_{\min} = 11.227$$

$$t_{\text{н}} = 3 \cdot \tau_{\min}$$

$$t_{\text{н}} = 33.681$$

### 3. Расчет частотных характеристик цепи $H(j\omega)$

Согласно [3, стр. 31] найдем аналитические выражения для амплитудно-частотной (АЧХ), фазово-частотной (ФЧХ) и амплитудно-фазовой характеристик (АФХ) цепи и построим их графики (Рис. 3.1, 3.2 и 3.3. соответственно):

$$A\Phi X(j\omega) = H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

$$AЧХ(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2};$$

$$\PhiЧХ(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

Выражения вещественной и мнимой частотных характеристик цепи:

$$Qc(x) := R_2 \cdot (-L_2 \cdot x^2 \cdot C_1 + 1) \cdot \frac{L_1 \cdot x^3 \cdot L_2 \cdot C_1 - x \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 - x \cdot L_1}{\left(-x^2 \cdot R_1 \cdot L_2 \cdot C_1 - x^2 \cdot R_2 \cdot L_2 \cdot C_1 - x^2 \cdot L_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + R_1 + R_2\right)^2 + \left(-L_1 \cdot x^3 \cdot L_2 \cdot C_1 + x \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + x \cdot L_1\right)^2}$$

$$Pc(x) := R_2 \cdot (-L_2 \cdot x^2 \cdot C_1 + 1) \cdot \frac{-x^2 \cdot R_1 \cdot L_2 \cdot C_1 - x^2 \cdot R_2 \cdot L_2 \cdot C_1 - x^2 \cdot L_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + R_1 + R_2}{\left(-x^2 \cdot R_1 \cdot L_2 \cdot C_1 - x^2 \cdot R_2 \cdot L_2 \cdot C_1 - x^2 \cdot L_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + R_1 + R_2\right)^2 + \left(-L_1 \cdot x^3 \cdot L_2 \cdot C_1 + x \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 + x \cdot L_1\right)^2}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$A(x) := \sqrt{Pc(x)^2 + Qc(x)^2} \text{ simplify} \rightarrow \frac{45}{2} \cdot \left[ \frac{(2781x^2 - 250)^2}{28051738425x^4 - 2815761659x^2 + 126562500 + 7733961000x^6} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Максимум АЧХ:  $\omega \rightarrow 0.5$

Значение АЧХ на частоте среза:  $\frac{A(0)}{\sqrt{2}} = 0.354$

Поиск частоты среза АЧХ:

$$\omega_{\text{ср}} := \text{root} \left( A(x) - \frac{A(0)}{\sqrt{2}}, x, 0, 1 \right) \quad \omega_{\text{ср}} = 0.212$$

Фазово-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\phi(x) := \text{atan2}(Pc(x), Qc(x))$$

Значение ФЧХ на частоте среза:  $\phi(\omega_{\text{ср}}) = -1.488$

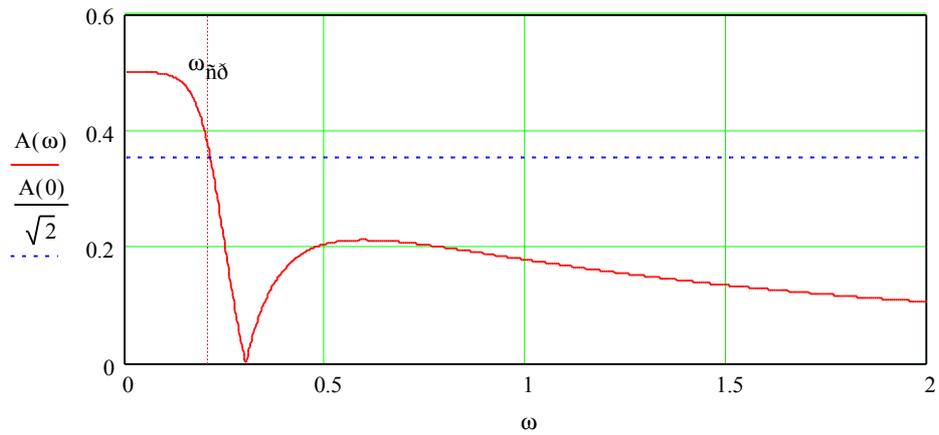


Рис. 3.1. График АЧХ цепи.

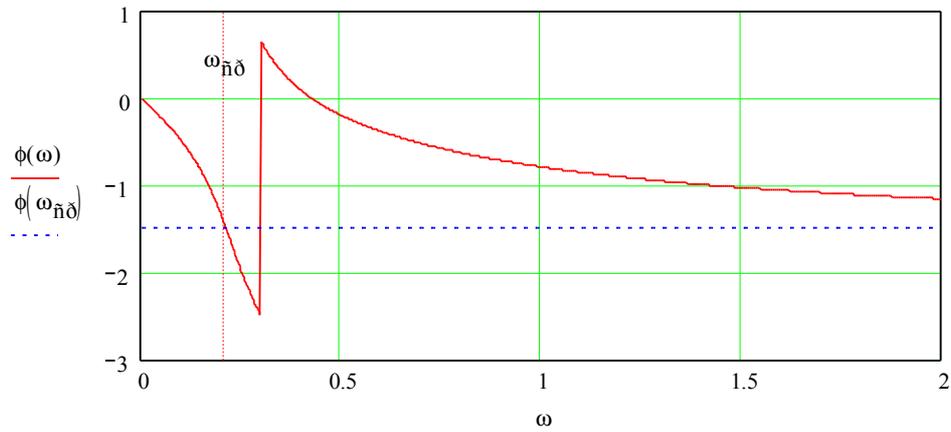


Рис. 3.2. График ФЧХ цепи.

Предполагаемое время запаздывания сигнала на выходе цепи:

$$t_{\zeta} := \frac{-\phi(\omega_{\text{н}\delta})}{\omega_{\text{н}\delta}} \quad t_{\zeta} = 7.031$$

Определение нескольких точек на кривой АФХ:

$$x := (0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.25 \ 0.4 \ 0.7 \ 1.1 \ 1.5 \ 2 \ 2.5 \ 3 \ 3.5)^T \quad n := \text{length}(x) \rightarrow$$

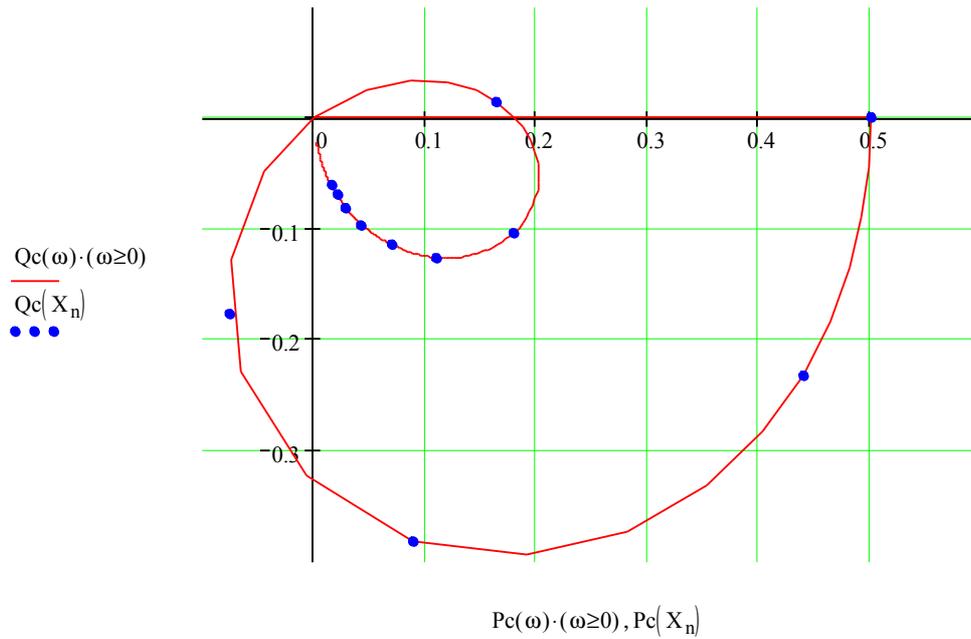


Рис. 3.3. График АФХ цепи.

Определим полосу пропускания на уровне:  $\frac{A(0)}{\sqrt{2}} = \frac{0,5}{\sqrt{2}} \approx 0,354$  .

Частота среза:  $\omega_{cp} = 0,212$  , полоса пропускания  $\omega \in [0, \omega_{cp}]$  в нашем случае соответствуют фильтру нижних частот.

Если предположить, что спектр входных сигналов попадает в указанную полосу пропускания, ожидаемые изменения амплитуды и времени запаздывания сигналов будут следующими:

- Время запаздывания сигнала на выходе цепи:  $t_3 = \frac{-\Phi(\omega_{cp})}{\omega_{cp}} = \frac{1,488}{2} = 7,03$  .
- Амплитуда выходного сигнала изменится в  $A(0) = 0,5$  раз (уменьшится в два раза).

#### 4. Составление уравнений состояния цепи

Для составления уравнений состояния цепи воспользуемся методом вспомогательных источников: заменим индуктивные элементы источниками тока, а конденсаторы – источниками напряжения (Рис. 4.1.). Расчет получившейся резистивной цепи будем осуществлять методом контурных токов (МКТ):

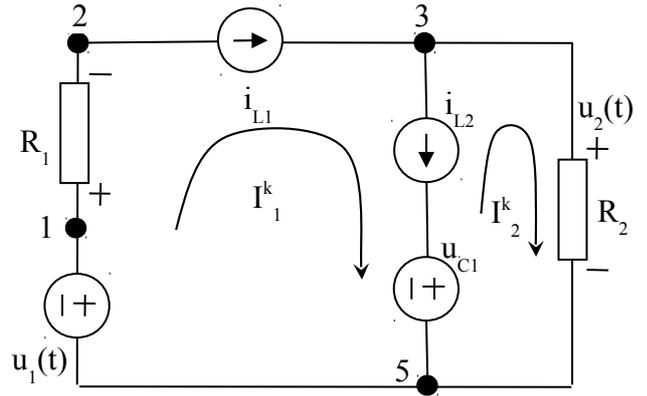


Рис. 4.1. Резистивная цепь

$$\begin{cases} L_1^k \cdot \dot{i}_{L1} \\ L_1^k \cdot L_2^k \cdot \dot{i}_{L2} \\ u_{C1} \cdot R_1^k \cdot \dot{u}_{C1} + u_{C1} \cdot u_{C1} \\ 0 \cdot R_2^k \cdot u_{C1} \cdot u_{L2} \end{cases} = \begin{cases} L_1^k \cdot \dot{i}_{L1} \\ \frac{u_{C1} \cdot u_{C1} \cdot u_{L1} \cdot u_{L2}}{R_1} \\ \frac{u_{C1} \cdot u_{L2}}{R_1} \end{cases}, \quad \text{Уравнения}$$

состояния:

$$\begin{cases} u_{L1} \cdot u_{C1} \cdot R_1 \cdot \dot{u}_{C1} \cdot u_{C1} \\ u_{L2} \cdot R_2 \cdot \dot{i}_{L1} \cdot \dot{i}_{L2} \cdot u_{C1} \\ \dot{i}_{L2} \cdot C_1 \cdot u_{C1} \end{cases} = \begin{cases} \dot{i}_{L1} \cdot \frac{1}{L_1} \cdot \left( \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_1} \right) \cdot \dot{i}_{L1} + \frac{R_2}{L_1} \cdot \dot{i}_{L2} \\ \dot{i}_{L2} \cdot \left( \frac{1}{L_2} \cdot u_{C1} + \frac{R_2}{L_2} \cdot \dot{i}_{L1} + \frac{R_2}{L_2} \cdot \dot{i}_{L2} \right) \\ \dot{u}_{C1} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \dot{i}_{L2} \end{cases}$$

Произведем машинный расчет характеристического полинома цепи:

Матрица коэффициентов системы уравнений состояния цепи:

$$K := \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_1}\right) & \frac{R_2}{L_1} & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -0.45 & 0.225 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.225 & 0 \end{pmatrix}$$

Функция характеристического полинома цепи:

$$PC(p) = \left| K - p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| \begin{array}{l} \text{collect, p} \\ \text{float, 4} \end{array} \rightarrow -.1799p - .8500p^2 - 4.04510^{-2} - 1.p^3$$

Корни полинома:

$$P = PC(p) \begin{array}{l} \text{solve, p} \\ \text{float, 4} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -.6718 \\ -8.90810^{-2} - .2286i \\ -8.90810^{-2} + .2286i \end{pmatrix}$$

Проконтролируем полученные результаты способом, описанным в [3, стр. 28]:

1. Корни характеристического полинома цепи совпали с корнями знаменателя передаточной функции, который согласно [1, стр. 157] также является характеристическим полиномом цепи.
2. Рассмотрим эквивалентные схемы замещения исходной цепи (*Рис. 4.2*).

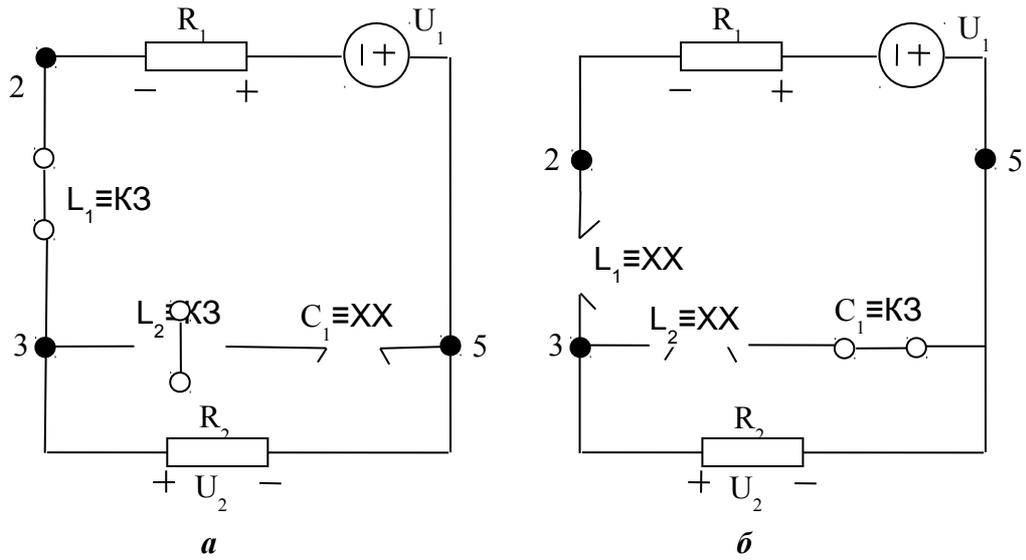


Рис. 4.2. Схемы замещения

Случай а - вынужденный режим ( $t \rightarrow \infty$ ):  $u_{C1}(\infty) = u_2(\infty)$ ,  $i_{L1}(\infty) = \frac{u_1(\infty)}{R_1 + R_2}$ ,  $i_{L2}(\infty) = 0$ .

Такие же вынужденные значения получаем по уравнениям состояния цепи, приравняв левую их часть к нулю.

Случай б ( $t = 0+$ ):  $u_{C1}(0+) = 0$ ,  $i_{L1}(0+) = i_{L2}(0+) = 0$ .

$$i'_{L1} = \frac{u_1(0+)}{L_1}, \quad i'_{L2} = 0, \quad u'_{C1} = 0.$$

Аналогичные значения производных получаем из уравнений состояния при  $t = 0+$ .

Проведенная проверка позволяет говорить о правильности полученного выше результата.

## 5. Определение переходной $h_1(t)$ и импульсной $h(t)$ характеристик

Согласно [1, стр. 156] передаточная функция цепи  $H(s)$  есть изображение по Лапласу импульсной характеристики цепи  $h(t)$  :

$$H(s) \leftrightarrow h(t)$$

Также исходя из [1, стр. 156], переходная характеристика цепи  $h_1(t)$  определяется из выражения:

$$h_1(t) \leftrightarrow H_1(s) = H(s)/s$$

Таким образом, импульсную и переходную характеристики цепи можно найти, взяв оригинал от изображения  $H(s)$  и  $H_1(s)$  соответственно (для этого следует использовать теорему разложения, описанную в [1, стр. 140]). Произведем машинный расчет для данного случая (при этом необходимо полученный результат домножить на  $\delta(t)$  для  $h_1(t)$ , на  $\delta'(t)$  для  $h(t)$ ):

Адаптированное выражение передаточной функции цепи:

$$H(s) = \frac{0.5Q(s)}{0.5R(s)} \text{ float,4} \rightarrow \frac{5.562s^2 + .5}{24.72s^3 + 21.01s^2 + 4.447s + 1.0}$$

Импульсная характеристика цепи:

$$h(t) = H(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float,4} \end{array} \right. \rightarrow .3108 \exp(-.6718t) - 8.57710^{-2} \cdot \exp(-8.90810^{-2} \cdot t) \cdot \cos(.2287t) + 4.32610^{-2} \cdot \exp(-8.90810^{-2} \cdot t) \cdot \sin(.2287t)$$

Переходная характеристика цепи:

$$h_1(t) = \frac{1}{s} \cdot H(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, s} \\ \text{simplify} \\ \text{float,4} \end{array} \right. \rightarrow .5000 - .4626 \exp(-.6718t) - 3.73910^{-2} \cdot \exp(-8.90810^{-2} \cdot t) \cdot \cos(.2287t) - .3897 \exp(-8.90810^{-2} \cdot t) \cdot \sin(.2287t)$$



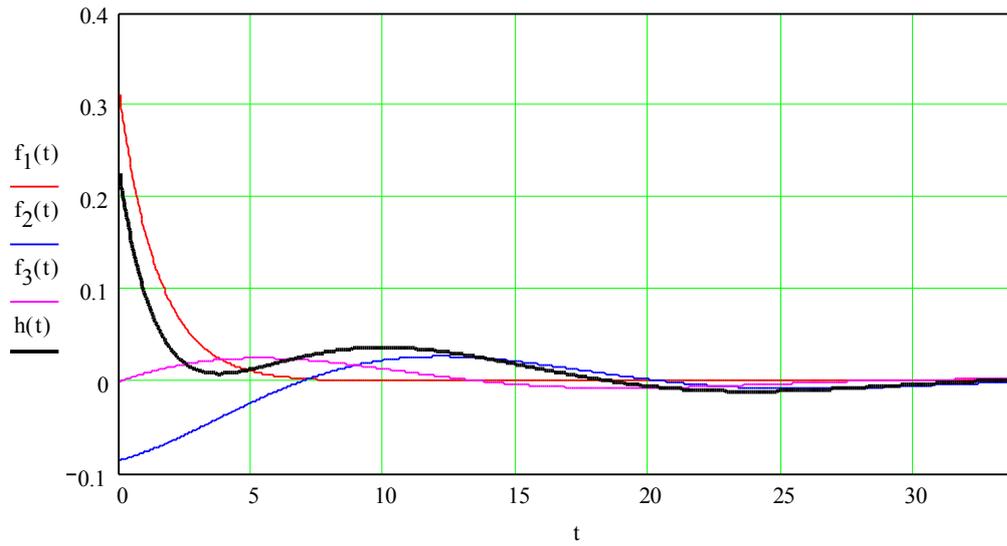


Рис. 5.1 Импульсная характеристика цепи и ее составляющие.

Составляющие переходной характеристики:

$$g_1(t) = 0.5$$

$$g_2(t) = -0.4626 \exp(-0.6718t)$$

$$g_3(t) = -3.73910^{-2} \cdot \exp(-8.90810^{-2} \cdot t) \cdot \cos(0.2287t)$$

$$g_4(t) = -0.3897 \exp(-8.90810^{-2} \cdot t) \cdot \sin(0.2287t)$$

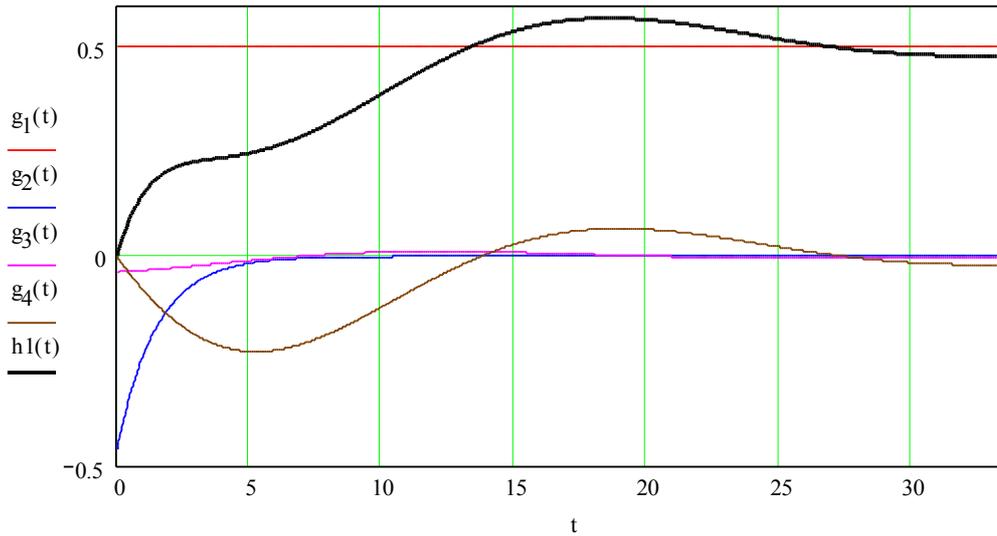


Рис. 5.2 Переходная характеристика цепи и ее составляющие.

Согласно Рис. 5.2. длительность переходного процесса составляет примерно 30, что согласуется с нашими предположениями о значении данной величины рассчитанной в п. 2.

Найдем теперь переходную характеристику цепи по уравнениям состояния, полученным в п. 4, применив численную формулу Эйлера. При этом принимаем входное воздействие:  $u_1(t) = \delta(t)$  и нулевые начальные условия. Рассчитаем по полученным в п.4 уравнениям состояния реакцию – выходное напряжение  $u_2(t)$ .

Уравнения состояния в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i'_{L1} \\ i'_{L2} \\ u'_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,45 & 0,225 & 0 \\ 0,4 & -0,4 & -0,4 \\ 0 & 0,225 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,225 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$

Уравнение Эйлера для вышеприведенной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_{C1} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_{C1} \end{bmatrix}_k + \Delta t \times \left\{ \begin{bmatrix} -0,45 & 0,225 & 0 \\ 0,4 & -0,4 & -0,4 \\ 0 & 0,225 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_{C1} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0,225 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \right\},$$

где  $k$  – переменная, нумерующая отсчеты времени;  $\Delta t$  – временной шаг. Таким образом, получаем определенное количество приближенных значений неизвестных переменных состояния для фиксированных моментов времени на всем интервале переходного процесса. Численные значения выходного напряжения  $u_2$  могут быть получены по закону Ома:

$$[u_2]_k = R_2 \times \{ [i_{L1}]_k - [i_{L2}]_k \}.$$

Выполним машинный расчет по вышеприведенной методике:

Число отсчетных значений времени:

$$N_p \gg 60$$

Временной шаг:

$$\Delta t = \frac{t_{ii}}{N_p}$$

Индексная переменная:

$$n = 1 \dots N_p$$

Начальные значения величин  $i_{L1}$ ,  $i_{L2}$ ,  $u_{C1}$ :

$$x_0 = (0 \ 0 \ 0)^T$$

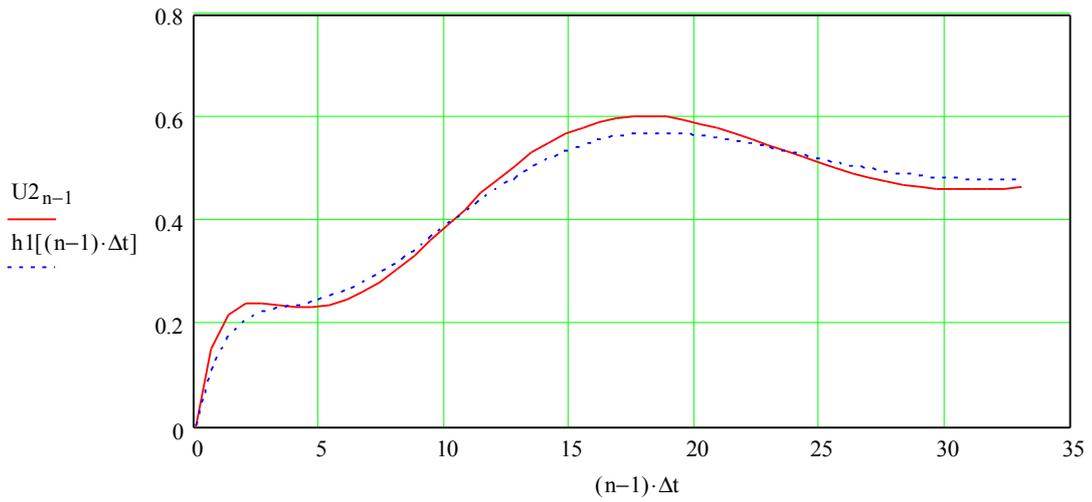
Применение формулы Эйлера:

$$x_n = x_{n-1} + \Delta t \cdot (M \cdot x_{n-1} + N)$$

Определение отсчетных значений выходного тока  $i_2$  по формуле Эйлера:

$$u_{20} = 0$$

$$u_{2n} = [(x_n)_0 - (x_n)_{1-}] \cdot R_2$$



Функция абсолютной ошибки численного расчета выходного напряжения цепи будет определяться выражением:

$$E_k = |U_k - h_1(k \cdot \Delta t)|, \quad k = 0 \dots N,$$

где N – число отсчетов времени.

График функции абсолютной ошибки представлен на рисунке 5.4. Числовые значения в трех характерных временных точках аналитической и численной функций выходного напряжения будут равны:

$$h_1(10 \cdot \Delta t) = 0.281 \quad U_{2_{10}} = 0.261$$

$$h_1(20 \cdot \Delta t) = 0.504 \quad U_{2_{20}} = 0.53$$

$$h_1(30 \cdot \Delta t) = 0.565 \quad U_{2_{30}} = 0.588$$

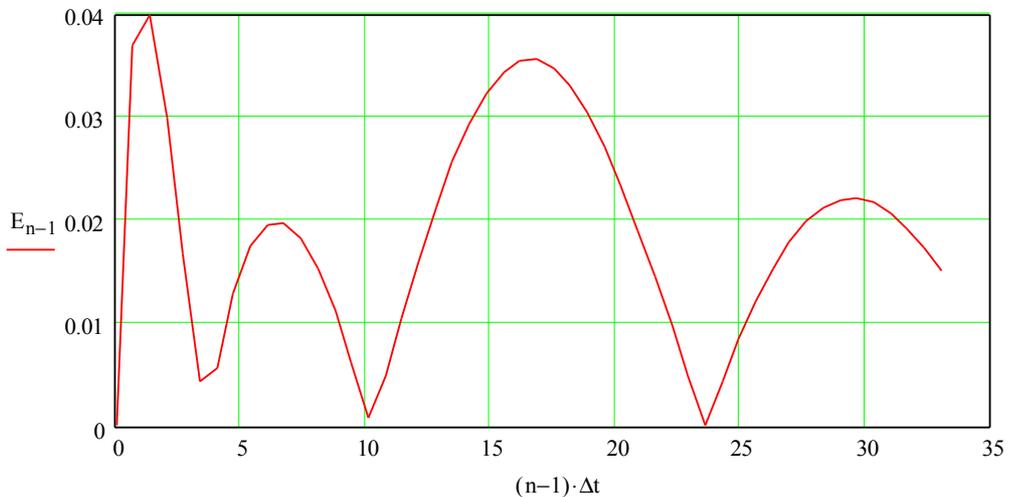


Рис. 5.4. График функции абсолютной ошибки.

Анализируя график на рисунке 5.4, обнаруживаем максимум абсолютной ошибки вычисления выходного напряжения численно на уровне 0,04. Эта величина будет тем меньше, чем меньше временной шаг  $\Delta t$ .

## **6. Вычисление реакции цепи при воздействии одиночного импульса на входе**

Для получения реакции цепи при воздействии представленного на *Рис. Т.2.* одиночного импульса на входе воспользуемся аналитическим методом расчета: разложим сигнал на элементарные составляющие при помощи обобщенных функций цепи. Далее изобразим на *Рис. 6.1.* исходный входной сигнал, заданный в условии, и сигнал на выходе цепи.

Элементарные функции входного импульса:

Элементарные функции входного импульса:

$$f_1(t) := \frac{4U_m}{t_{\text{д}}} \cdot t \cdot \Phi(t)$$

$$f_2(t) := \frac{4U_m}{t_{\text{д}}} \cdot (t - 0.25t_{\text{д}}) \cdot \Phi(t - 0.25t_{\text{д}})$$

$$f_3(t) := \frac{4U_m}{t_{\text{д}}} \cdot (t - 0.75t_{\text{д}}) \cdot \Phi(t - 0.75t_{\text{д}})$$

$$f_4(t) := \frac{4U_m}{t_{\text{д}}} \cdot (t - t_{\text{д}}) \cdot \Phi(t - t_{\text{д}})$$

Полная функция входного импульса:

$$u_1(t) := f1(t) + f2(t) + f3(t) + f4(t)$$

Весовая характеристика цепи:

$$h2(t) := \int_0^t h1(t) dt$$

Элементарные составляющие выходного сигнала:

Полная функция выходного сигнала:

$$f5(t) := \frac{4 \cdot U_m}{t_{\text{e}}} \cdot h2(t) \cdot \Phi(t)$$

$$f6(t) := \frac{4 \cdot U_m}{t_{\text{e}}} \cdot h2(t - 0.25t_{\text{e}}) \cdot \Phi(t - 0.25t_{\text{e}})$$

$$f7(t) := \frac{4 \cdot U_m}{t_{\text{e}}} \cdot h2(t - 0.75t_{\text{e}}) \cdot \Phi(t - 0.75t_{\text{e}})$$

$$f8(t) := \frac{4 \cdot U_m}{t_{\text{e}}} \cdot h2(t - t_{\text{e}}) \cdot \Phi(t - t_{\text{e}})$$

$$u_2(t) := f5(t) + f6(t) + f7(t) + f8(t)$$

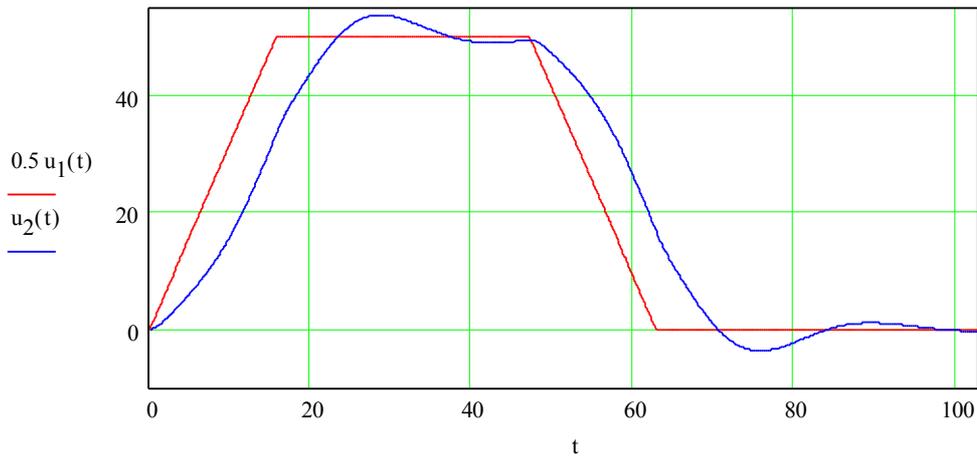


Рис. 6.1. Графики входного и выходного импульсов цепи.

Исходя из Рис. 6.1. можно заключить, что:

- Сигнал на выходе цепи подвергся искажениям.
- В общем, несмотря на произошедшие искажения, форма сигнала весьма близка к форме сигнала исходного (входного сигнала цепи) – искажения сигнала по форме можно признать незначительными.
- Предположения о характере выходного сигнала, сделанные в п., в целом, оправдались: амплитуда выходного сигнала приблизительно в два раза меньше амплитуды входного сигнала цепи, время запаздывания сигнала, исходя из графика, несколько меньше по сравнению с нашими предположениями.

Искажение исходного сигнала на выходе цепи связано, прежде всего, с особенностями прохождения тока через реактивные элементы цепи, а именно с запаздыванием реакции вследствие инерционности этих элементов (этим и объясняется запаздывание сигнала на выходе).

## 7. Определение спектральных характеристик одиночного импульса воздействия

Найдем изображение по Лапласу входного одиночного сигнала, затем - амплитудный и фазовый спектры одиночного входного сигнала, затем - построим их графики (Рис. 7.1 и 7.2 соответственно):

Изображение по Лапласу входного импульса:

$$U1(s) = \frac{6.369}{s^2} + 6.369 \frac{\exp(-62.80s)}{s^2} - 6.369 \frac{\exp(-15.70s)}{s^2} - 6.369 \frac{\exp(-47.10s)}{s^2}$$

АФХ входного импульса:

$$U1(j\cdot x) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{complex} \rightarrow \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \frac{-6.369 - 6.369 \cos(62.80x) + 6.369 \cos(15.70x) + 6.369 \cos(47.10x)}{x^2} + 1 \cdot i \cdot \frac{6.369 \sin(62.80x) - 6.369 \sin(15.70x) - 6.369 \sin(47.10x)}{x^2}$$

ВЧХ и МЧХ входного импульса:

$$P1(x) = \frac{-6.369 - 6.369 \cos(62.80x) + 6.369 \cos(15.70x) + 6.369 \cos(47.10x)}{x^2}$$

$$Q1(x) = \frac{6.369 \sin(62.80x) - 6.369 \sin(15.70x) - 6.369 \sin(47.10x)}{x^2}$$

АЧХ входного импульса:

$$A1(x) = \sqrt{P1(x)^2 + Q1(x)^2} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 6.369 \sqrt{-1 - \cos(62.8x) + \cos(15.7x) + \cos(47.1x) + \cos(62.8x) \cos(15.7x) + \cos(62.8x) \cos(47.1x) - \cos(15.7x) \cos(47.1x) + \sin(62.8x) \sin(15.7x) + \sin(62.8x) \sin(47.1x) - \sin(15.7x) \sin(47.1x)} \frac{1}{x^2}$$

Упрощенное выражение АЧХ входного импульса:

$$A1(x) = \left| \frac{16 \cdot U_m}{t_e} \cdot \frac{\sin\left(\frac{t_e}{8} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{3t_e}{8} \cdot x\right)}{x^2} \right|$$

Уровень 10-ти процентов сигнала основной гармоники:

$$C = A1(0.18) = 0.1 \quad C = 69.294$$

ФЧХ входного импульса:

$$\phi(x) = \text{atan2}(Q1(x), P1(x))$$

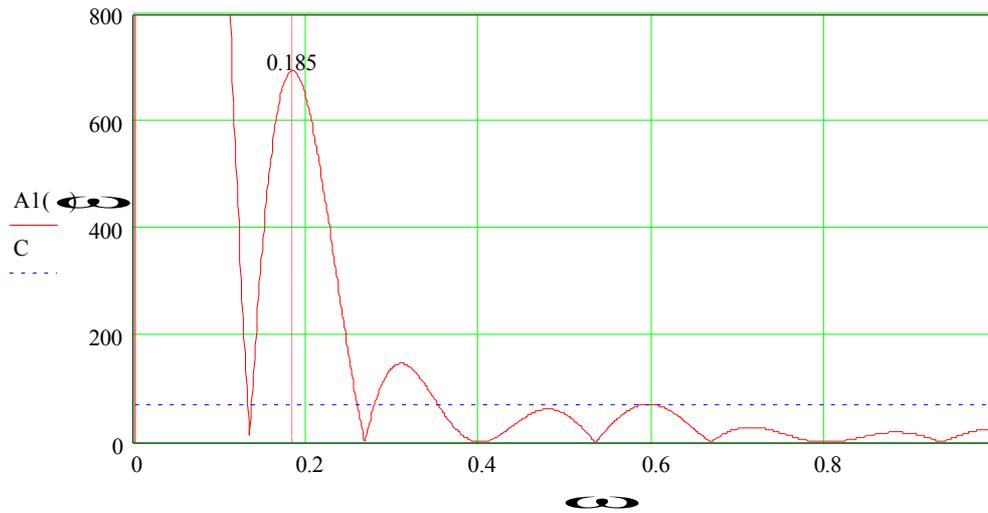


Рис. 7.1. График АЧХ сигнала.

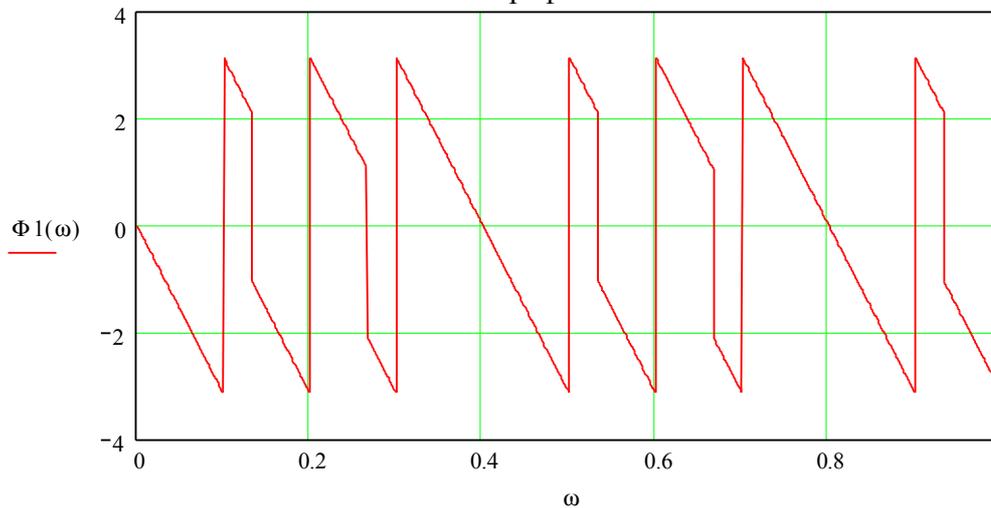


Рис. 7.2. График ФЧХ сигнала.

При анализе амплитудного и фазового спектров входного импульса можно сделать выводы:

- спектр содержит постоянную составляющую бесконечно амплитуды;
- ширина амплитудного спектра составляет  $\Delta\omega \approx 0.4$ , тогда как полоса пропускания цепи определена на уровне 0,212.
- существенная часть первого лепестка амплитудного спектра входного сигнала, где сосредоточена его основная энергия, укладывается в полосу пропускания, а фазочастотная характеристика в этой полосе близка к линейной. Таким образом, правомерно предположить, что сигнал на выходе цепи подвергнется незначительным искажениям, что согласуется с оценкой, данной в п. 6.

## 8. Вычисление спектра реакции при одиночном импульсе на входе

Частотные характеристики сигнала выходного напряжения могут быть получены использованием соответствующих спектров входного сигнала и АФХ цепи:

АЧХ и ФЧХ спектра реакции соответственно:

$$A_2(\omega) = A_1(\omega) |H(\omega)| \quad \varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi(\omega)$$

Графики амплитудного и фазового спектров реакции цепи на одиночный импульс изображены на рисунках 8.1 и 8.2 соответственно.

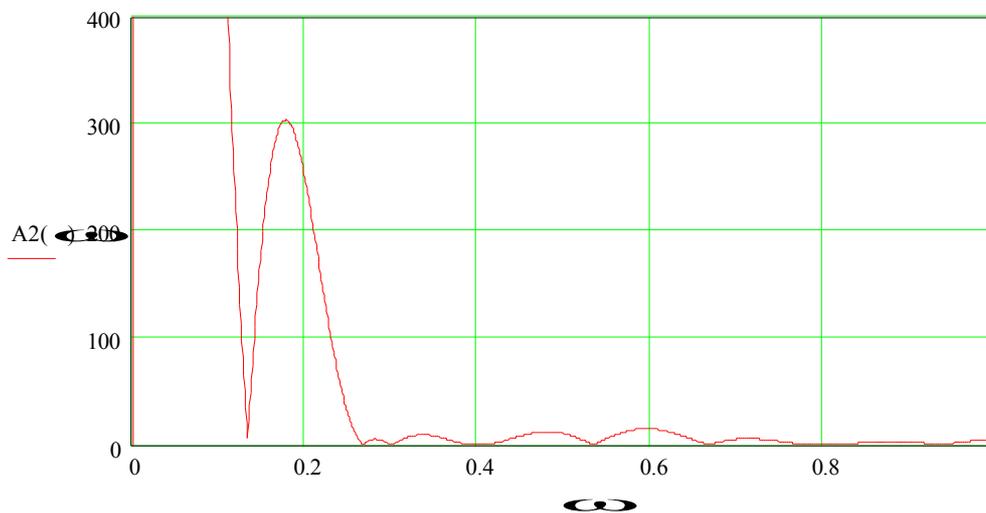


Рис. 8.1. Амплитудный спектр реакции цепи.

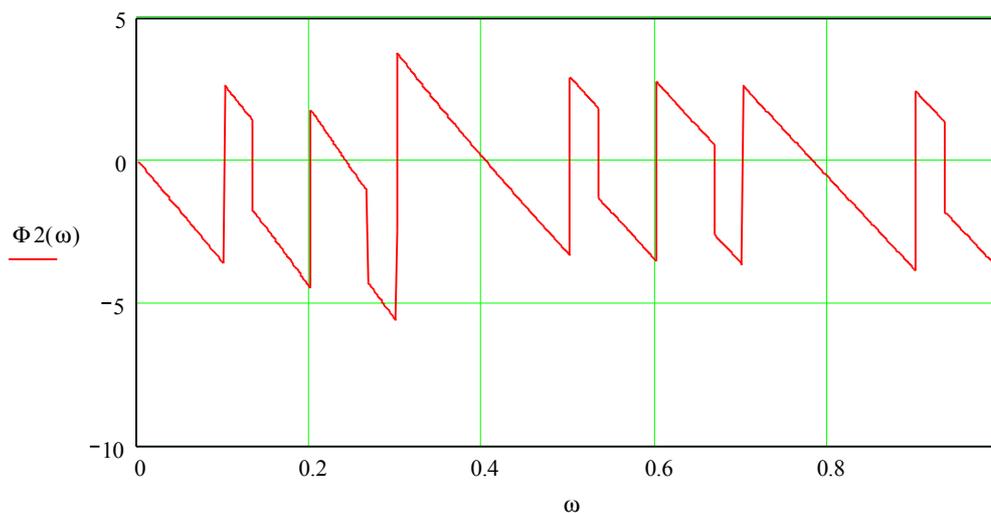


Рис. 8.2. Фазовый спектр реакции цепи.

## 9. Определение спектра периодического входного сигнала

Функции амплитуд синусных и косинусных гармонических составляющих периодического входного сигнала определяются выражением:

$$a(k) = \frac{2}{T} \int_0^T u_1(t) \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt;$$

$$b(k) = \frac{2}{T} \int_0^T u_1(t) \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt,$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 0,1$  - угловая частота основной гармоники.

Зная величины  $a$  и  $b$  для каждой  $k$ -й гармоники получим векторы дискретных амплитудного и фазового спектров:

$$A_k = \sqrt{a(k)^2 + b(k)^2};$$

$$\psi_k = \arctan \frac{b(k)}{a(k)}.$$

Получим дискретные амплитудные фазовые спектры при помощи ПО Mathcad:

Число частотных интервалов:

$$N_{\omega} = 10$$

Частотный индекс:

$$n = 0..N_{\omega}$$

Основная гармоника периодического входного сигнала:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad \omega_1 = 0,1$$

Коэффициенты разложения в ряд Фурье периодического входного сигнала:

$$a(k) = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u_1(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

$$b(k) = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T u_1(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_1 \cdot t) dt$$

Амплитуды и фазы гармонических составляющих входного сигнала:

$$A_n = \sqrt{(a(n))^2 + (b(n))^2} \quad \varphi_n = \text{atan2}(a(n), b(n))$$

На рисунках 9.1 и 9.2 изображены дискретные спектры входного периодического сигнала, построенные для диапазона  $N_{\text{сф}} = 1000$ .

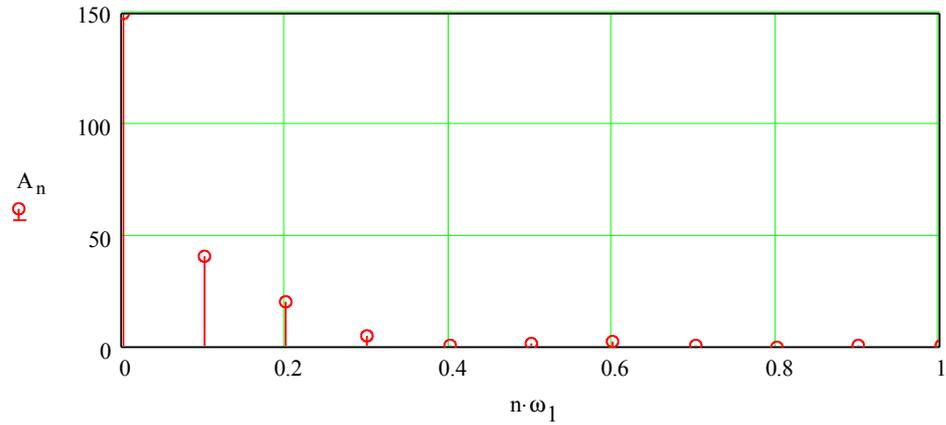


Рис. 9.1. Дискретный амплитудный спектр входного периодического сигнала.

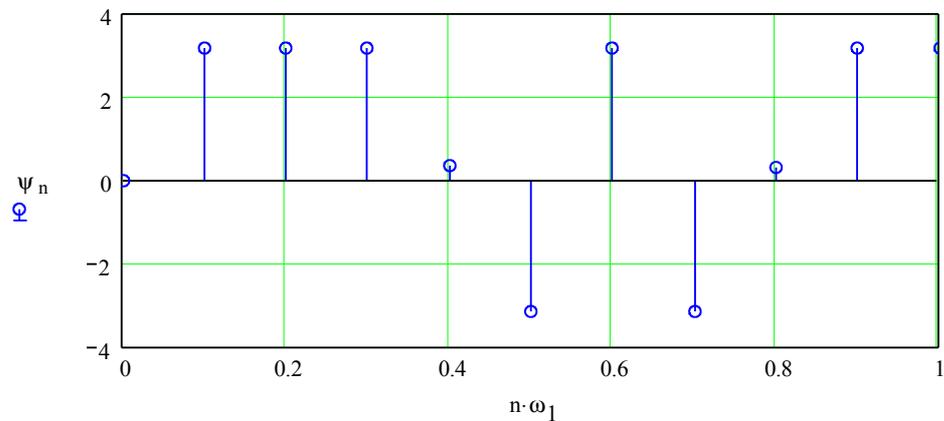


Рис. 9.2. Дискретный фазовый спектр входного периодического сигнала.

Используя векторы амплитуд и фаз периодического входного сигнала, аппроксимируем последний гармоническим рядом Фурье:

Аппроксимация входного сигнала гармоническим рядом из первых 3-х гармоник:

$$u_{1f}(t) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^3 A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t + \psi_k)$$

Функции первых трех составляющих гармоник ряда Фурье:

$$g_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1)$$

$$g_2(t) = A_2 \cos(2\omega_1 t - \psi_2)$$

$$g_3(t) = A_3 \cos(3\omega_1 t - \psi_3)$$

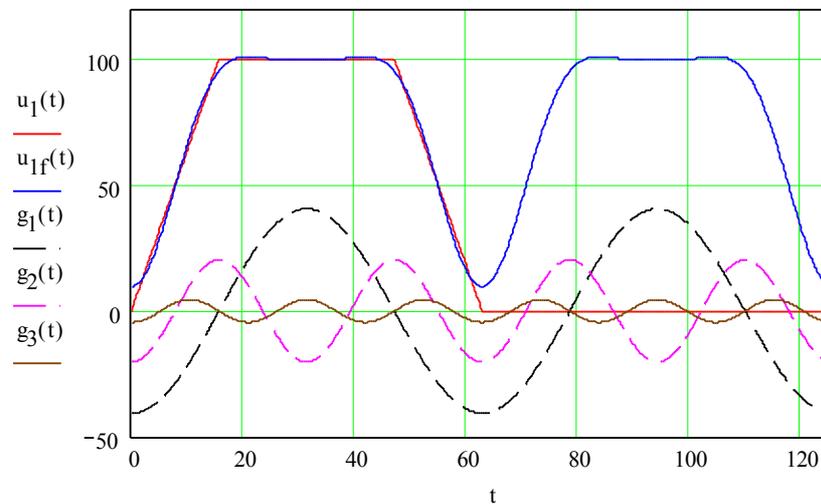


Рис. 9.3. Графики точного входного импульса и аппроксимированного гармоническим рядом периодического входного сигнала и его первых трех гармоник.

## 10. Приближенный расчет реакции при периодическом воздействии

Реакция на периодический входной сигнал может быть также рассчитана приближенным гармоническим рядом, для чего необходимы ее амплитудный и фазовый спектры:

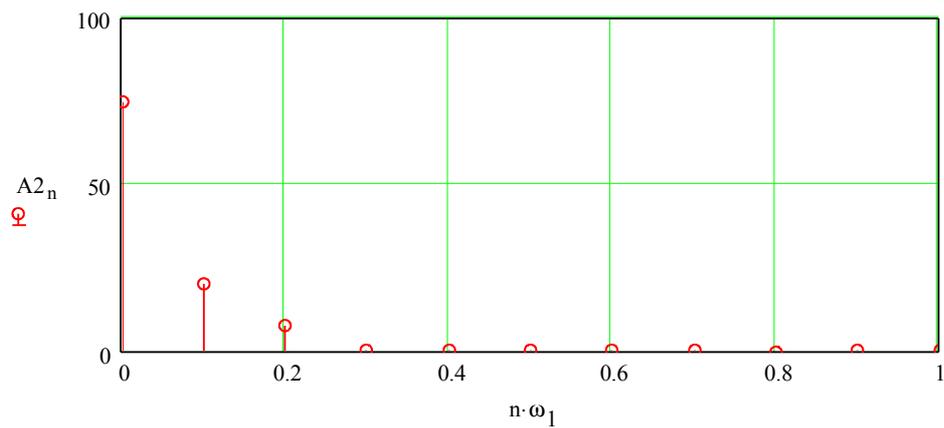
Векторы амплитуд и фаз гармоник выходного сигнала:

$$A2_n = |H(j \cdot n \cdot \omega_1)| \cdot A_n$$

$$\varphi_{2n} = \arg(H(j \cdot n \cdot \omega_1)) + \varphi_n$$

Амплитудный и фазовый дискретные спектры реакции цепи на периодический сигнал изображены на рисунках 10.1 и 10.2 соответственно.

Рис. 10.1. Дискретный амплитудный спектр реакции цепи.



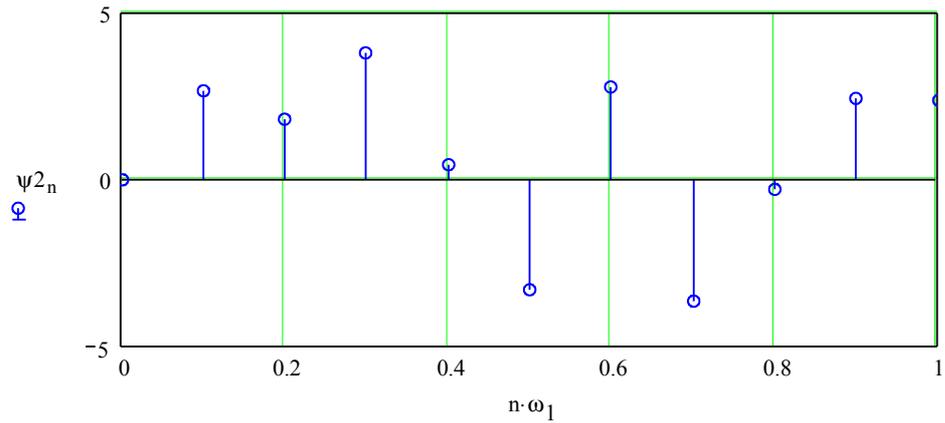


Рис. 10.2. Дискретный амплитудный спектр реакции цепи.

Аппроксимация выходного сигнала производится аналогично с входным представлением его в виде конечного ряда Фурье:

Аппроксимация выходного сигнала гармоническим рядом с учетом 3-х гармоник:

$$u_{2f}(t) = \frac{A_{20} \cdot \cos(\psi_{20})}{2} + \sum_{k=1}^3 A_{2k} \cdot \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t + \psi_{2k})$$

График аппроксимированного выходного сигнала изображен на рисунке 10.3 на фоне входного периодического сигнала, измененного в  $|H(0)|$  раз. Форма сигнала реакции цепи подтверждает предположения, сделанные выше, об искажениях сигнала на выходе цепи.

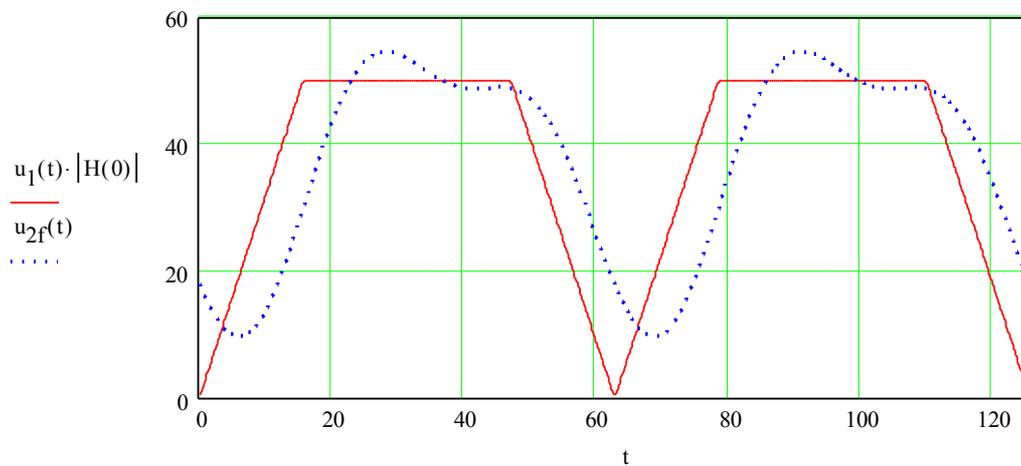


Рис. 10.3. Дискретный амплитудный спектр реакции цепи.

## Заключение

Выполненная работа позволяет произвести сравнение различных методов расчета цепей. После ее проведения можно заключить следующее:

1. Наиболее трудоемким является отыскание реакции цепи во временной области.
2. Применение преобразований Лапласа и Фурье позволяет значительно упростить отыскание реакции на воздействие сигнала произвольной формы.
3. Применение частотного метода анализа при апериодическом воздействии позволяет сделать качественные выводы об искажениях сигнала при его прохождении через цепь.
4. При воздействии периодического сигнала наиболее оправданным является применение частотного метода анализа.

## Список использованной литературы

1. Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышев Э.П. **Основы теории электрических цепей: Учебник для вузов.** – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 464 с.
2. Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышев Э.П. и др. **Сборник задач и практикум по основам теории электрических цепей.** – СПб.: Питер, 2005. – 304 с.:ил. – (Серия «Учебное пособие»).
3. Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышев Э.П. и др. **Курсовое проектирование по теории электрических цепей.** – СПб.: Издательство СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», 1996. – 136 с.:ил.
4. Матханов П. Н. **Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи.** М.: Высш. шк., 1990.
5. Кудрявцев Е.М. **Mathcad 11: полное руководство по русской версии.** – М.: ДМК Пресс, 2005. – 592 с., ил.
6. Конспект лекций по Основам теории электрических цепей. Лектор: доцент кафедры ТОЭ СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», к.т.н. Соколов Валентин Николаевич.
7. Конспект лекций по Теории функций комплексного переменного. Лектор: доцент кафедры Высшей математики – 2 СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», к.т.н. Дюмин Виктор Георгиевич.