

## Задание 6. Расчет нелинейной магнитной цепи переменного тока методом кусочно-линейной аппроксимации

### Условие задания

Задана нелинейная магнитная цепь с магнитопроводом из ферромагнитного материала и двумя обмотками (рис. 6.1), электрическая схема замещения которой представлена на рис. 6.2.

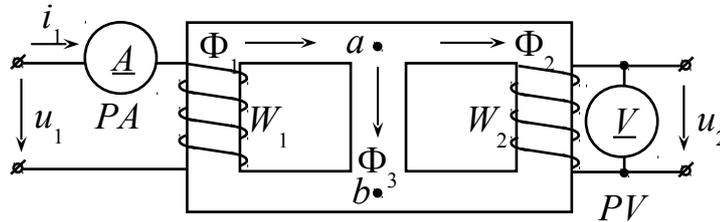


Рисунок 6.1 Нелинейная магнитная цепь переменного тока

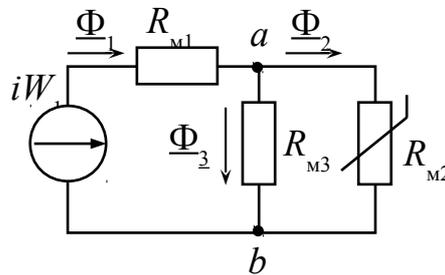


Рисунок 6.2. Схема замещения нелинейной магнитной цепи.

К зажимам обмотки  $W_1$  подключен источник гармонического напряжения  $u = U_m \sin \omega t$ , а обмотка  $W_2$  разомкнута.

Левый и средний стержни магнитопровода (рис. 6.1) работают в линейном режиме, и поэтому на электрической схеме замещения представлены линейными магнитными сопротивлениями  $R_{m1}$ ,  $R_{m3}$ . Правый стержень магнитопровода (рис. 6.1) может достигать состояния насыщения и на схеме замещения представлен нелинейным магнитным сопротивлением  $R_{m2}$ . При этом задана его идеальная кривая намагничивания  $B(H)$  (рис. 6.3).

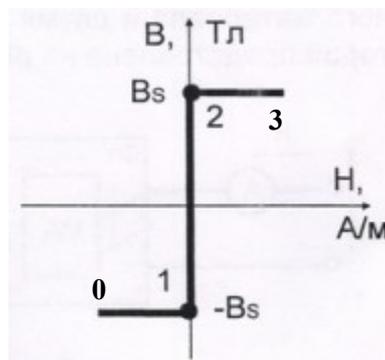


Рисунок 6.3. Идеальная кривая намагничивания участка магнитной цепи.

1. Рассчитать и построить графики функций времени:  $u_1(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$ ,  $\Phi_3(t)$

2. Определить показания приборов для случаев, когда прибор:
  - а) магнитоэлектрической системы ( $I_{MЭ}, U_{MЭ}$ );
  - б) электромагнитной системы ( $I_{ЭМ}, U_{ЭМ}$ ).
3. Определить границы изменения параметра  $\omega$ , чтобы рабочая точка выходила на участок насыщения.
4. Разложить в ряд Фурье кривую выходного напряжения  $u_2(t)$ , ограничиваясь четырьмя членами ряда.
5. Определить коэффициент искажения  $K_u$  и коэффициент высших гармоник  $K_r$ .

**Примечание.**

В индивидуальном задании указаны:  $U_M - [В]$ ;  $U_S - [А]$ ;  $R_{M1,3} \cdot 10^3 - [Гн]$ ;  $\omega - [с^{-1}]$ ,  $\Phi - [Вб]$ ,  $I - [мА]$ ,  $B - [Тл]$ .

Исходные данные по варианту:

$$R_{M1} = 16 \cdot 10^3 \text{ Гн}; N_1 = 30;$$

$$R_{M3} = 16 \cdot 10^3 \text{ Гн}; N_2 = 30;$$

$$U_m = 340 \text{ В};$$

$$\omega = 23600 \text{ с}^{-1};$$

$$B_s = 4;$$

$$S_2 = 100 \text{ мм}^2.$$

Искомые величины:  $U_m, K_I$ .

**Решение**

**Определение выражений функций времени для заданных величин**

Функции времени величин  $u_1(t), i_1(t), u_2(t), \Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)$  определяем для трех участков характеристики намагничивания (рис. 6.3). Функция питающего напряжения имеет вид:

$$u_1(t) = U_m \sin \omega t = 340 \sin 23600t \text{ В}.$$

Функция магнитного потока в первом стержне может быть найдена из соотношений:

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \Rightarrow d\Phi_1 = \frac{u_1}{N_1} dt = \frac{U_m}{N_1} \sin \omega t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_1(t) = -\frac{U_m}{N_1 \omega} \cos \omega t = -\frac{340}{30 \cdot 23600} \cdot \cos 23600t = -4,802 \cdot 10^{-4} \cos 23600t =$$

$$= 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ Вб}.$$

Для участка **0-1** характеристики намагничивания  $B(H)$  величина магнитной индукции постоянная и равна  $-B_s$ . Магнитный поток стержня также будет постоянен и равен:

$$\Phi_1 = B_s \cdot S_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Функцию первичного тока  $i_1$  найдем из системы уравнений по 1-му и 2-му законам Кирхгофа для магнитной цепи. Для представленной схемы замещения (рис. 6.2) характерна следующая система уравнений согласно законам Кирхгофа:

$$\begin{cases}
 N_1 i_1 - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 0 \\
 N_1 i_1 - N_2 i_2 - N_3 i_3 = 0 \\
 0 = 0
 \end{cases}
 \quad (1)$$

Выразив из (1) ток  $i_1$  найдем его функцию:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{\Phi_1 R_{m1} + \Phi_3 R_{m3}}{N_1} \Rightarrow \frac{\Phi_1 R_{m1} + (\Phi_1 - \Phi_S) R_{m3}}{N_1} = \frac{(R_{m1} + R_{m3}) \Phi_1}{N_1} - \frac{\Phi_S R_{m3}}{N_1} = \\
 &= \frac{32 \cdot 10^3}{30} 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 16 \cdot 10^3}{30} = 0,512 \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,213 \text{ A.}
 \end{aligned}$$

Поскольку магнитный поток второго стержня  $\Phi_2$  не изменяется на участке насыщения, то функция вторичного напряжения будет равна 0:

$$u_2 = N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = 0.$$

Функцию магнитного потока  $\Phi_3$  найдем из 1-го уравнения системы (1):

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_S = 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Итого для участка 0-1 магнитной цепи (рис. 6.1) имеем:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(t) &= 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ Вб}; \\
 \Phi_3(t) &= 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \\
 \Phi_2 &= -\Phi_S = -4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \\
 u_2 &= 0; \\
 i_1(t) &= 0,512 \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,213 \text{ A.}
 \end{aligned}$$

Для участка 1-2 характеристики намагничивания  $B(H)$  магнитное напряжение между узлами 1 и 2 (см. рис. 6.1) равно 0, таким образом, имеем следующие выражения искомых функций:

$$u_{ab} = 0 \Rightarrow \Phi_3 = \frac{u_{ab}}{R_{m3}} = 0,$$

поток  $\Phi_2$ , согласно уравнению 1 системы (1), равен:

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t) - \Phi_3(t) = \Phi_1(t) = 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ Вб},$$

функция вторичного напряжения имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &= N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_1}{dt} \\ u_1(t) &= N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow u_2(t) = \frac{N_2}{N_1} u_1(t) = 1 \cdot 340 \sin 23600t \text{ В} ,$$

функция первичного тока из уравнения 2 системы (1) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\Phi_1 R_{m1} + \Phi_3 R_{m3}}{N_1} = \frac{\Phi_1 R_{m1}}{N_1} = \frac{16 \cdot 10^3}{30} 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 0,256 \cdot \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ А}. \end{aligned}$$

Итого для участка 1-2 магнитной цепи (рис. 6.1) имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ Вб}; \\ \Phi_2(t) &= \Phi_1(t) = 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ Вб}; \\ \Phi_3 &= 0; \\ u_2 &= 340 \sin 23600t; \\ i_1(t) &= 0,256 \cdot \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ А}. \end{aligned}$$

Для участка 2-3 характеристики намагничивания  $B(H)$  выражения искомым функций аналогичны таковым для участка 0-1 с той лишь разницей, что изменятся знаки потока  $\Phi_2$  и постоянной составляющей тока  $i_1$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ Вб}; \\ \Phi_3(t) &= 4,802 \cdot 10^{-4} \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) - 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \\ \Phi_2 &= \Phi_3 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \\ u_2 &= 0; \\ i_1(t) &= 0,512 \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) - 0,213 \text{ А}. \end{aligned}$$

### Определение моментов времени перемагничивания второго стержня

Определим моменты времени перехода с участка перемагничивания на участок насыщения. Для этих случаев можно записать следующие равенства:

- 1)  $\Phi = -\Phi$  ;
- 2)  $\Phi = \Phi$  .

Таким образом, имеем:

1)

$$\left\{ \begin{aligned} -4,802 \cdot 10^{-4} \cos(23600t_1) &= -4 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \cos(23600t_1) = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4,802 \cdot 10^{-4}} = 0,8(3) \Rightarrow t_1 = \frac{\arccos 0,8(3)}{23600} = \\ &= 2,485 \cdot 10^{-5} \text{ с} \approx 0,0248 \text{ мс}; \\ \omega t_1 &= 23600 \cdot 2,485 \cdot 10^{-5} = 0,586 \text{ рад}; \end{aligned} \right.$$

$$2) \begin{cases} -4,802 \cdot 10^{-4} \cos(23600t_2) = 4 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \cos(23600t_2) = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{-4,802 \cdot 10^{-4}} = -0,8(3) \Rightarrow t_2 = \\ \frac{\arccos[-0,8(3)]}{23600} = 1,083 \cdot 10^{-4} \text{ с} \approx 0,1083 \text{ мс}; \\ \omega t_2 = 23600 \cdot 1,083 \cdot 10^{-4} = 2,555 \text{ рад}. \end{cases}$$

### Определение показаний приборов магнитоэлектрической и электромагнитной систем

Показания магнитоэлектрического вольтметра  $PV$  выпрямителем являются средневыпрямленными за угловой интервал от 0 до  $\pi$  и могут быть определены согласно выражению:

$$PV_{MЭ} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} u_2(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 340 \sin(\omega) d\omega = \frac{340}{\pi} \cos \omega \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{340}{\pi} \times \\ \times (\cos 23600 \cdot 2,485 \cdot 10^{-5} - \cos 23600 \cdot 1,083 \cdot 10^{-4}) \approx 180,3 \text{ В}.$$

Показания магнитоэлектрического амперметра  $PA$  определяются аналогичным образом для трех угловых интервалов от 0 до  $\pi$ :

$$PI_{MЭ} = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\omega t_1} i_1(\omega t) d\omega t + \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} i_1(\omega t) d\omega t + \int_{\omega t_1}^{\pi} i_1(\omega t) d\omega t \right) = \\ = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\omega t_1} (-0,512 \cos \omega t + 0,213) d\omega t + \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} -0,256 \cos \omega t d\omega t + \int_{\omega t_2}^{\pi} (-0,512 \cos \omega t - 0,213) d\omega t \right) = \\ = \frac{1}{\pi} \left[ (-0,512 \sin \omega t + 0,213 \cdot \omega t) \Big|_0^{\omega t_1} + (-0,256 \sin \omega t) \Big|_{\omega t_1}^{\omega t_2} + (-0,512 \sin \omega t - 0,213 \cdot \omega t) \Big|_{\omega t_2}^{\pi} \right] = \\ = \frac{1}{\pi} \left[ -0,512 \sin(2,555) + 0,213 \cdot 2,555 + 0,512 \sin(0,586) - 0,213 \cdot 0,586 - 0,256 \sin(2,555) + \right. \\ \left. + 0,256 \sin(0,586) - 0,512 \sin(2,555) - 0,213 \cdot 2,555 + 0,512 \sin(0,586) + 0,213 \cdot 0,586 \right] = 0$$

Показания приборов электромагнитной системы соответствуют среднеквадратическим значениям функций за угловой интервал от 0 до  $\pi$ . Таким образом показания электромагнитного вольтметра равны:

$$PV_{ЭМ} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} u_2^2(\omega) d\omega} = \sqrt{\frac{340}{\pi} \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2 \omega d\omega} = \sqrt{\frac{340}{\pi} \cdot \int_{0,586}^{2,555} \sin^2 23600t d23600t} = 230,614 \text{ В}$$

Показания электромагнитного амперметра находятся аналогично:

$$\begin{aligned}
 PA_{ЭМ} &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\omega_1} i_1^2(\omega t) dt + \int_{\omega_1}^{\omega_2} i_1^2(\omega t) dt + \int_{\omega_2}^{\pi} i_1^2(\omega t) dt \right)} = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\omega_1} (-0,512 \cos \omega t + 0,213)^2 dt + \int_{\omega_1}^{\omega_2} (-0,256 \cos \omega t)^2 dt + \int_{\omega_2}^{\pi} (-0,512 \cos \omega t - 0,213)^2 dt \right)} = \\
 &= 0,196 A = 196 mA.
 \end{aligned}$$

### Разложение в ряд Фурье кривой выходного напряжения $u_2(t)$

Функция  $u_2(t)$  симметрична относительно начала координат (нечетная функция), а также симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов. Таким образом, ее тригонометрический ряд содержит только нечетные синусоидальные гармоники. Ограниченный первыми 4-мя нечетными гармониками ряд будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= U_{1M} \sin(\omega t) + U_{3M} \sin(3\omega t) + U_{5M} \sin(5\omega t) + U_{7M} \sin(7\omega t); \\
 u_2(t) &= 340 \cdot \sin \omega t \text{ при } \omega t \in [0,586; 2,555] \cup [\pi + 0,586; \pi + 2,555] \text{ рад.}
 \end{aligned}$$

Амплитуды гармоник можно определить из выражения:

$$U_{nM} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} u_2(\omega t) \sin n \omega t d\omega t.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 U_{1M} &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 340 \cdot \sin \omega t \cdot \sin \omega t d\omega t = \frac{340}{\pi} \left( \int_{0,586}^{2,555} (1 - \cos(2\omega t)) d\omega t \right) = 312,84 B; \\
 U_{3M} &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 340 \cdot \sin \omega t \cdot \sin 3\omega t d\omega t = \frac{340}{\pi} \left( \int_{0,586}^{2,555} (\cos(2\omega t) - \cos(4\omega t)) d\omega t \right) = -61,1 B; \\
 U_{5M} &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 340 \cdot \sin \omega t \cdot \sin 5\omega t d\omega t = \frac{340}{\pi} \left( \int_{0,586}^{2,555} (\cos(4\omega t) - \cos(6\omega t)) d\omega t \right) = -51,9 B; \\
 U_{7M} &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} 340 \cdot \sin \omega t \cdot \sin 7\omega t d\omega t = \frac{340}{\pi} \left( \int_{0,586}^{2,555} (\cos(6\omega t) - \cos(8\omega t)) d\omega t \right) = -13,78 B.
 \end{aligned}$$

Таким образом, выражение функции выходного напряжения в виде ограниченного тригонометрического ряда имеет вид:

$$u_2(t) = 312,84 \sin 23600t - 61,1 \sin 70800t - 51,9 \sin 118000t - 13,78 \sin 165200t.$$

### Определение коэффициента искажения выходного напряжения и коэффициента высших гармоник

Коэффициент искажения определяем как отношение действующего значения напряжения первой гармоники к среднеквадратичному от эффективных значений всех гармоник выходного напряжения:

$$\begin{aligned}
 k_{II} &= \frac{\frac{U_{M1}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{U_{M1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{M3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{M5}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{M7}}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\frac{312,84}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{312,84}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-61,1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-51,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-13,78}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \\
 &= 0,968.
 \end{aligned}$$

Коэффициент высших гармоник определяется как отношение среднеквадратического от эффективных значений выходного напряжения всех гармоник, отличных от первой, к эффективному значению первой гармоники:

$$k_r = \frac{\sqrt{\left(\frac{U_{M3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{M5}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{M7}}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{U_{M1}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{-61,1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-51,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-13,78}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{312,84}{\sqrt{2}}} = 0,26.$$

### Построение кривых искомым функций для одного периода

Функции первичного напряжения  $u_1(t)$  и магнитного потока первого стержня  $\Phi_1(t)$  неизменны на всем периоде. Функции остальных величин могут быть построены согласно следующему алгоритму:

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} -\Phi_s, & \Phi_1(t) < \Phi_1(t_1); \\ i|\Phi_1(t), & \Phi_1(t_1) \leq \Phi_1(t) \leq \Phi_1(t_2); \\ \Phi_s, & \Phi_1(t) > \Phi_1(t_2). \end{cases}$$

$$\Phi_3(t) = \begin{cases} \Phi_1(t) + \Phi_s, & \Phi_1(t) < \Phi_1(t_1); \\ 0, & \Phi_1(t_1) \leq \Phi_1(t) \leq \Phi_1(t_2); \\ \Phi_1(t) - \Phi_s, & \Phi_1(t) > \Phi_1(t_2). \end{cases}$$

$$s_1(t) = 0,512 \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,213; \quad s_1(t_1) = -0,213;$$

$$s_2(t) = 0,256 \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_3(t) = 0,512 \sin\left(23600t - \frac{\pi}{2}\right) - 0,213;$$

$$i_1(t) = \begin{cases} s_1(t), & s_1(t) < s_1(t_1); \\ s_2(t), & s_2(t_1) \leq s_2(t) \leq s_2(t_2); \\ s_3(t), & s_3(t) > s_3(t_2). \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & u_1(t) > u_1(t_1); \\ u_1(t), & u_1(t) < u_1(t_1); \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Графики искомым функций, построенные согласно приведенному алгоритму изображены на рисунках 6.4, 6.5, 6.6.

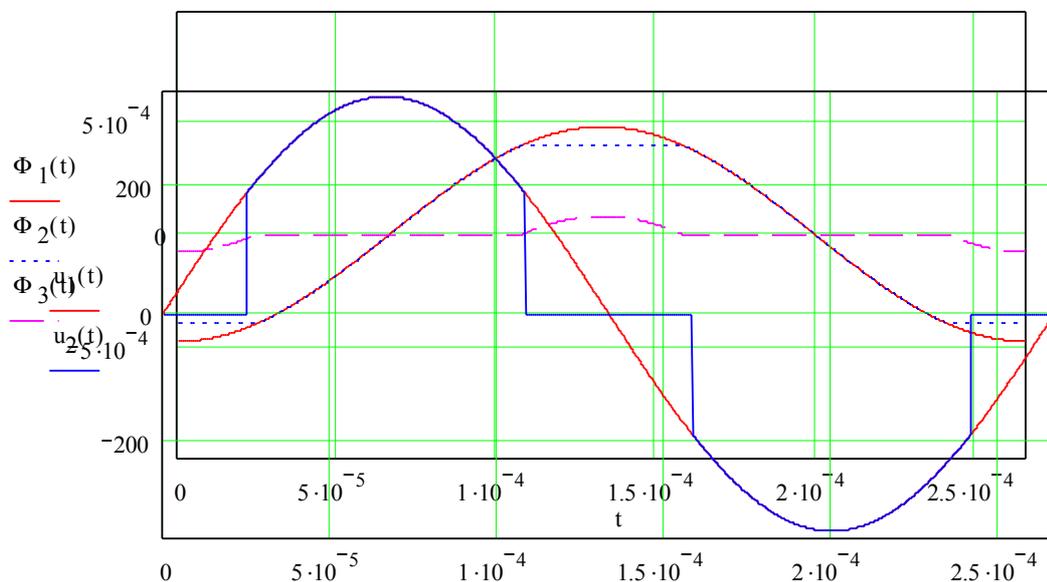


Рисунок 6.4 Графики функций потоков магнитопровода.

Рисунок 6.5 Графики функций первичного и вторичного напряжений.

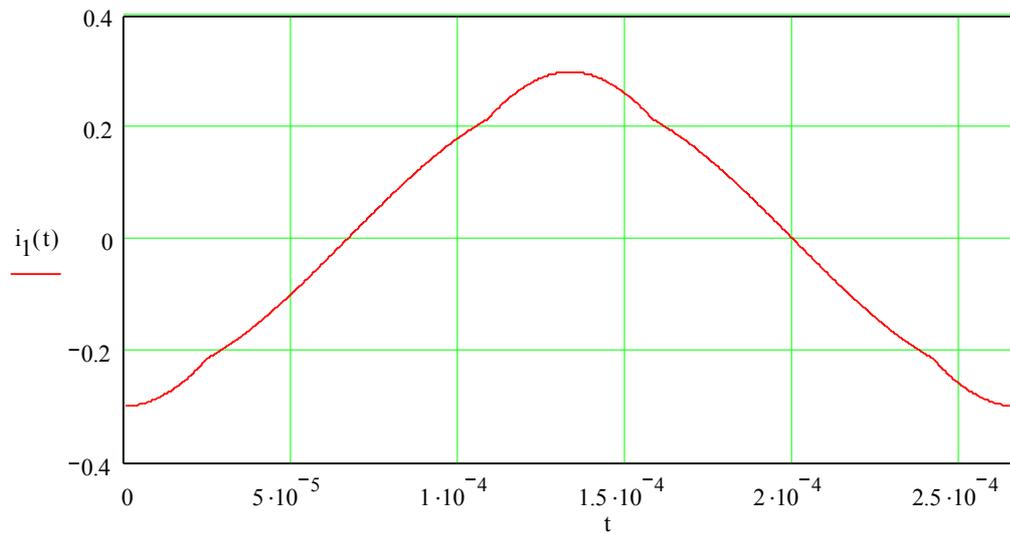


Рисунок 6.6 График функции первичного тока.