

СОДЕРЖАНИЕ

<u>Исходные данные и задание к контрольной работе.....</u>	<u>3</u>
<u>Ход работы.....</u>	<u>4</u>
<u> Определение типов динамических звеньев и передаточных функций САУ.....</u>	<u>4</u>
<u> Определение устойчивости САУ и расчет граничных параметров.....</u>	<u>4</u>
<u> Расчет статических характеристик САУ.....</u>	<u>6</u>
<u> Расчет логарифмических частотных характеристик САУ с заданным запасом устойчивости по амплитуде. Определение запаса устойчивости по фазе.....</u>	<u>9</u>
<u> Расчет амплитудной и вещественной частотных характеристик замкнутой САУ. Определение показателей качества регулирования.....</u>	<u>11</u>
<u> Расчет переходных характеристик САУ по задающему и возмущающему воздействиям.....</u>	<u>13</u>
<u> Синтез последовательного корректирующего устройства.....</u>	<u>17</u>
<u>Перечень используемой литературы.....</u>	<u>27</u>

Исходные данные и задание к контрольной работе

Вариант	Передаточные функции и их параметры	Дополнительные условия
4	$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}; W_2(p) = \tau_2 p + 1;$ $W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}; W_{oc}(p) = \frac{k_{oc}}{T_{oc} p + 1};$ $k_1 = 50; k_3 = 5; k_{oc} = 0,2;$ $T_1 = 0,1 c; \tau_2 = 0,01 c; T_3 = 0,9 c; T_{oc} = 0,0$	Зад. возд. $g = 5$ В Возм. возд. $f = 10$ В Запас устойчив. $\Delta L = 8$ дБ Варьируемые параметры: $x_1 = T_1; x_2 = k_1$ Время переход. процесса: $t_{ин} = 0,2$ с

В работе необходимо:

1. Определить типовые звенья, входящие в структуру САУ.
2. Определить передаточные функции (ПФ) САУ и ее характеристический полином.
3. По критерию устойчивости Гурвица определить устойчивость САУ, рассчитать граничное значение коэффициента передачи разомкнутой цепи и построить область устойчивости САУ относительно варьируемых параметров x_1 и x_2 .
4. Построить статические и внешние характеристики для заданной САУ и для САУ, у которой значение параметра x_2 выбрано в соответствии с заданным запасом устойчивости по амплитуде ΔG . Рассчитать статизм для обоих вариантов САУ и сравнить полученные результаты.
5. Для САУ, у которой значение параметра x_2 выбрано в соответствии с заданным запасом устойчивости по амплитуде ΔG , рассчитать асимптотическую и точную ЛАЧХ, точную логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФЧХ) и определить запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$.
6. Для замкнутой САУ, у которой значение параметра x_2 выбрано в соответствии с заданным запасом устойчивости по амплитуде ΔG , рассчитать амплитудную (АЧХ) и вещественную (ВЧХ) частотные характеристики и определить по ним показатели качества регулирования.
7. Для замкнутой САУ, у которой значение параметра x_2 выбрано в соответствии с заданным запасом устойчивости по амплитуде ΔG , рассчитать переходные характеристики по задающему g и возмущающему f воздействиями, определить по ним показатели качества регулирования и сравнить результаты с ранее полученными.
8. Исходя из заданного времени переходного процесса $t_{ин}$ и перерегулирования $\delta = 25\%$ провести синтез последовательного корректирующего устройства и рассчитать переходную характеристику скорректированной САУ по задающему воздействию. Определить показатели качества регулирования для этой САУ и сравнить их с ранее рассчитанными.

Структурная схема САУ изображена на рисунке 1.

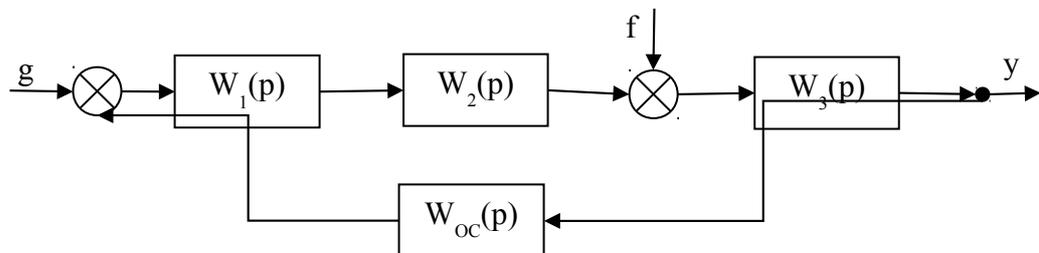


Рисунок 1. Структурная схема САУ.

Ход работы

Определение типов динамических звеньев и передаточных функций САУ

Заданная система автоматического управления состоит из следующих типов звеньев:
 $W_2(p)$ – форсирующее звено, представляющее собой сумму дифференцирующего (τ) и пропорционального звеньев (1);
 $W_1(p)$, $W_3(p)$ и $W_{OC}(p)$ – представляют собой апериодические звенья первого порядка (инерционные звенья).

ПФ разомкнутой системы будут иметь вид:

- по задающему воздействию: $W_g(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = \frac{k_1 k_3 (\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$;

- возмущению: $W_f(p) = W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}$;

- по задающему воздействию с учетом обратной связи:

$$W_{gz}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_{OC}(p) = \frac{k_1 k_3 k_{OC} (\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_{OC} p + 1)}$$
 ;

ПФ замкнутой САУ по задающему воздействию и возмущению будут иметь вид соответственно:

$$H_g(p) = \frac{W_g(p)}{1 + W_{gz}(p)} = \frac{\frac{k_1 k_3 (\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}}{1 + \frac{k_1 k_3 k_{OC} (\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_{OC} p + 1)}} = \frac{k_1 k_3 (\tau_2 p + 1)(T_{OC} p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_{OC} p + 1) + k_1 k_3 k_{OC} (\tau_2 p + 1)}$$

;

$$H_f(p) = \frac{W_3(p)}{1 + W_{gz}(p)} = \frac{\frac{k_3}{T_3 p + 1}}{1 + \frac{k_1 k_3 k_{OC} (\tau_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_{OC} p + 1)}} = \frac{k_3 (T_1 p + 1)(T_{OC} p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_{OC} p + 1) + k_1 k_3 k_{OC} (\tau_2 p + 1)}$$

Характеристический полином системы имеет вид:

$$\begin{aligned} D(p) &= a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = (T_1 p + 1)(T_3 p + 1)(T_{OC} p + 1) + k_1 k_3 k_{OC} (\tau_2 p + 1) = \\ &= T_1 T_3 T_{OC} p^3 + (T_1 T_3 + T_1 T_{OC} + T_3 T_{OC}) p^2 + (k_1 k_3 k_{OC} \tau_2 + T_1 + T_3 + T_{OC}) p + k_1 k_3 k_{OC} + 1; \\ a_3 &= T_1 T_3 T_{OC}; \\ a_2 &= T_1 T_3 + T_1 T_{OC} + T_3 T_{OC}; \\ a_1 &= k_1 k_3 k_{OC} \tau_2 + T_1 + T_3 + T_{OC}; \\ a_0 &= k_1 k_3 k_{OC} + 1. \end{aligned}$$

Определение устойчивости САУ и расчет граничных параметров

Для определения устойчивости САУ с заданными параметрами воспользуемся критерием Гурвица. Для устойчивой САУ третьего порядка имеет место неравенство:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

Найдем определитель Δ_2 при помощи ПО Mathcad:

$$k_1 = 50$$

$$k_3 = 5$$

$$k_{oc} = 0.2$$

$$T_1 = 0.1$$

$$T_2 = 0.01$$

$$T_3 = 0.5$$

$$T_{oc} = 0.01$$

$$D(p) = T_{oc} \cdot p^3 \cdot T_1 \cdot T_3 + (T_{oc} \cdot T_3 + T_{oc} \cdot T_1 + T_1 \cdot T_3) \cdot p^2 + (k_1 \cdot k_3 \cdot k_{oc} \cdot T_2 + T_{oc} + T_3 + T_1) \cdot p + k_1 \cdot k_3 \cdot k_{oc} + 1$$

$$A := D(p) \text{ coeffs, } p \rightarrow \begin{pmatrix} 51.0 \\ 1.530 \\ .120 \\ 2.7 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} A_2 & A_0 \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} \rightarrow 4.590010^{-2}$$

Поскольку определитель Δ_2 положителен, то САУ устойчива.

Коэффициент передачи разомкнутой системы равен:

$$K_{p, \text{раз}} = k_1 \cdot k_3 \cdot k_{oc} = 50 \cdot 5 \cdot 0.2 = 50$$

Определим граничное значение этого коэффициента, решив, согласно критерию Гурвица, уравнение вида:

$$0 = \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & A_0 \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} = (T_1 T_3 + T_1 T_{oc} + T_{oc} T_3) \cdot (K_{p, \text{раз}} \cdot T_2 + T_{oc} + T_1 + T_3) - T_1 T_3 T_{oc} (K_{p, \text{раз}} + 1)$$

Получим решение при помощи ПО Mathcad, произведя замену $x_3 = K_p$, $x_1 = T_1$:

Поиск выражения для границы устойчивости по параметрам x_1 , x_2 :

given

$$A(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \cdot T_2 + T_{oc} + T_3 + x_1 \\ T_{oc} \cdot T_3 + T_{oc} \cdot x_1 + x_1 \cdot T_3 \\ T_{oc} \cdot T_1 \cdot T_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$A(x_1, x_3) := \begin{pmatrix} x_3 \cdot T_2 + T_{oc} + T_3 + x_1 \\ T_{oc} \cdot T_3 + T_{oc} \cdot x_1 + x_1 \cdot T_3 \\ T_{oc} \cdot T_1 \cdot T_3 \end{pmatrix} \quad \text{- вектор-функция коэффициентов характеристического полинома;}$$

$$x_3(x_1) := \text{find}(x_3) \text{ collect } x_1 \rightarrow -1 \cdot \frac{747. + 29730 \cdot x_1 + 31000 \cdot x_1^2}{-81. + 310 \cdot x_1}$$

$$x_3(T_1) = 80.6$$

Таким образом, граничное значение коэффициента передачи САУ равно 80,6.

Граница устойчивости системы в плоскости параметров x_1, x_2 может быть найдена из выражения:

$$x_2(x_1) = \frac{1}{k_3 k_{OC}} x_3(x_1) = \frac{-1}{k_3 k_{OC}} \cdot \frac{31000x_1^2 + 29730x_1 + 747}{310x_1 - 81}$$

Воспользовавшись ПО Mathcad, построим границу устойчивости САУ в окрестности постоянной времени T_1 :

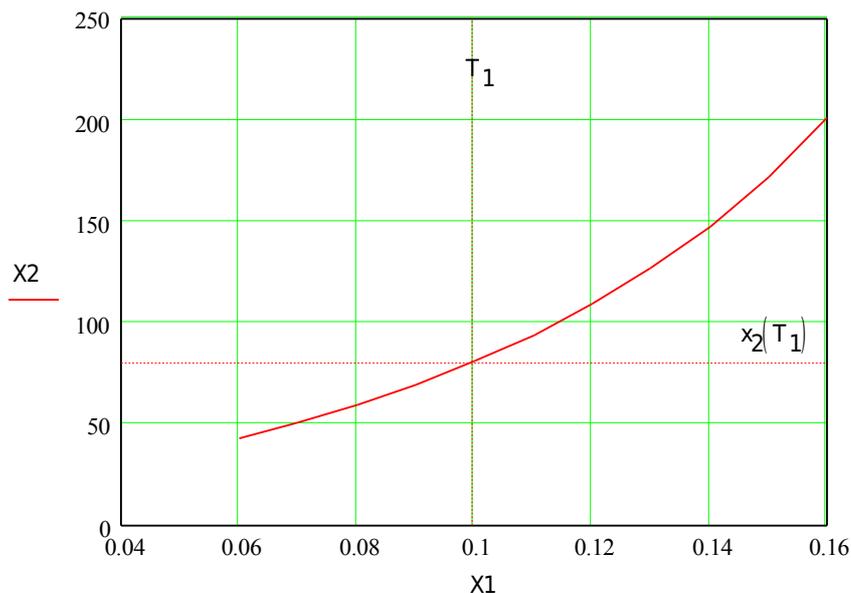
$$x_2(x_1) = \frac{1}{k_3 k_{OC}} \cdot x_3(x_1)$$

$$N = \frac{0.16 - 0.06}{0.01} \quad N \rightarrow 0$$

$$k = 0 \dots N$$

$$x1_k = 0.01k + 0.06$$

$$x2_k = x_2(x1_k)$$



Таким образом, область устойчивости САУ расположена ниже кривой $x_2(x_1)$. На приведенном графике, на пересечении пунктирных линий, обозначена точка граничного коэффициента передачи системы для заданной постоянной времени T_1 .

Расчет статических характеристик САУ

Для заданного запаса устойчивости по амплитуде при помощи ПО Mathcad определим значение коэффициента передачи k_1 и соответствующее ему новое значение коэффициента передачи разомкнутой САУ, а также уточним задающее воздействие при новом коэффициенте передачи системы, при котором получается аналогичное установившееся значение выходного сигнала:

$\Delta G = 8$ - заданный запас устойчивости САУ по амплитуде;

$x_2(T_1) = 80.6$ - граничное значение коэффициента передачи САУ в разомкнутом состоянии;

$$k_{1.H} = \frac{x_2(T_1)}{\frac{\Delta G}{10^{20}}} \quad k_{1.H} = 32.087 \quad \text{- новое значение коэффициента передачи первого звена САУ;}$$

$$K_{p.H} = k_{1.H} \cdot k_3 \cdot k_{oc} \quad K_{p.H} = 32.087 \quad \text{- новое значение коэффициента передачи САУ в разомкнутом состоянии;}$$

$g = 5$ - заданное значение задающего сигнала;

$$g_1 = g \cdot \frac{(1 + K_{p.H}) \cdot k_1}{(1 + K_p) \cdot k_{1.H}} \quad g_1 = 5.055 \quad \text{- скорректированное значение задающего сигнала для нового коэффициента передачи САУ в разомкнутом состоянии;}$$

Уравнения статических внешних характеристик для исходного и пересчитанного коэффициента передачи k_1 имеют вид:

$$y_g(t) = g \cdot \frac{k_1 k_3}{K_p + 1} - f \cdot \frac{k_3}{K_p + 1};$$

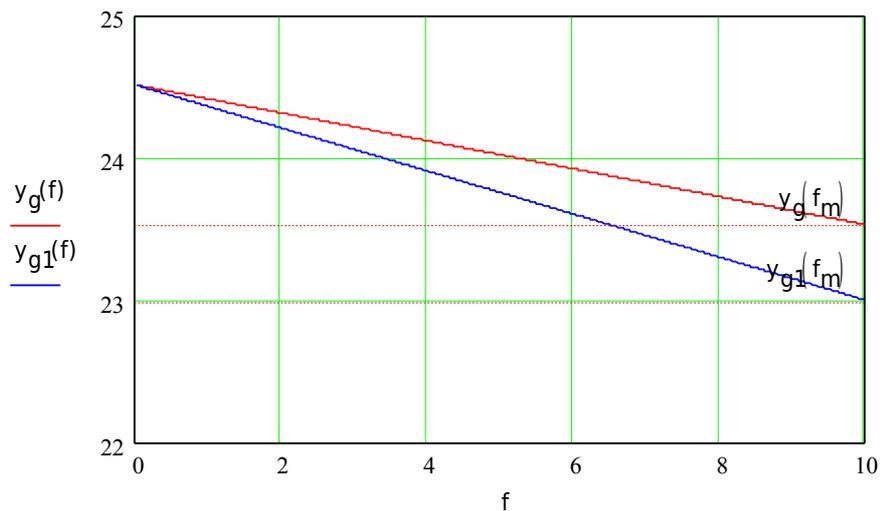
$$y_{g1}(t) = g_1 \cdot \frac{k_{1.H} k_3}{K_{p.H} + 1} - f \cdot \frac{k_3}{K_{p.H} + 1}.$$

Построим функции статических характеристик при помощи ПО Mathcad и рассчитаем статизм САУ для двух значений k_1 :

$$y_g(f) = g \cdot \frac{k_1 k_3}{K_p + 1} - f \cdot \frac{k_3}{K_p + 1} \quad \text{- уравнение внешней характеристики заданной САУ}$$

$$y_{g1}(f) = g_1 \cdot \frac{k_{1.H} k_3}{K_{p.H} + 1} - f \cdot \frac{k_3}{K_{p.H} + 1} \quad \text{- уравнение внешней характеристики САУ с измененным коэффициентом передачи}$$

Графики статических внешних характеристик



Значение выходной величины при отсутствии возмущения:

Отклонение выходной величины при действии
максимального возмущения:

$$y_g^{(0)} = 24.51 \quad \Delta y_g = y_g^{(0)} - y_g(f_m) \quad \Delta y_g = 0.98$$

Значение выходной величины при максимальном
возмущении:

$$y_{g1}^{(0)} = 24.51 \quad \Delta y_{g1} = y_{g1}^{(0)} - y_{g1}(f_m) \quad \Delta y_{g1} = 1.511$$

$$y_g(10) = 23.529$$

$$y_{g1}(10) = 22.999$$

Статизм САУ:

$$S = \frac{\Delta y_g}{y_g^{(0)}}$$

$$S = 0.04$$

$$S_1 = \frac{\Delta y_{g1}}{y_{g1}^{(0)}}$$

$$S_1 = 0.062$$

Расчет показывает, что статизм системы возрастает с уменьшением коэффициента передачи k_1 при прочих равных параметрах САУ.

Расчет логарифмических частотных характеристик САУ с заданным запасом устойчивости по амплитуде. Определение запаса устойчивости по фазе.

Общее выражение логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) разомкнутой САУ имеет вид:

$$L(\omega) = 20 \log |W_{гз}(j\omega)|$$

Для заданного запаса устойчивости системы ΔL и соответствующего ему коэффициента передачи разомкнутой системы частотная передаточная функция разомкнутой САУ будет иметь вид:

$$W_{гз1}(j\omega) = W_{11}(j\omega) \cdot W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega) \cdot W_{oc}(j\omega) = \frac{k_{1.н} k_3 k_{oc} (1 + j\tau_2 \omega)}{(1 + jT_1 \omega)(1 + jT_3 \omega)(1 + jT_{oc} \omega)}$$

Асимптотическая ЛАЧХ САУ формируется следующим выражением:

$$L_a(\omega) = 20 \log(K_{п.н}) - 20 \log(T_1 \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{T_1} \right) + 20 \log(\tau_2 \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{\tau_2} \right) - 20 \log(T_3 \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{T_3} \right) - 20 \log(T_{oc} \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{T_{oc}} \right)$$

Выражение точной логарифмической фазово-частотной характеристики (ЛФЧХ) определяется как сумма ЛФЧХ звеньев системы имеет вид:

$$\varphi(\omega) = \arg(W_{гз1}(j\omega)) = \arg(W_{11}(j\omega)) + \arg(W_2(j\omega)) + \arg(W_3(j\omega)) + \arg(W_{oc}(j\omega))$$

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ САУ и определения запаса устойчивости по фазе воспользуемся ПО Mathcad:

$$L(\omega) = 20 \log \left[\left| \frac{k_{1.н} k_3 k_{oc} (\tau_2 j \omega + 1)}{(T_1 j \omega + 1) (T_3 j \omega + 1) (T_{oc} j \omega + 1)} \right| \right]$$

$$\frac{1}{T_3} = 1.111$$

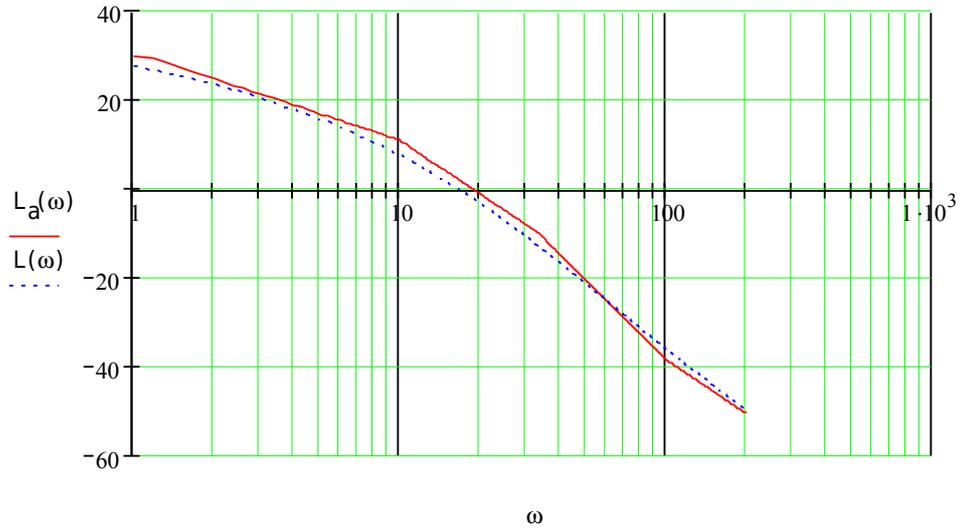
$$\frac{1}{T_{oc}} = 33.333$$

$$\frac{1}{\tau_2} = 100$$

$$\frac{1}{T_1} = 10$$

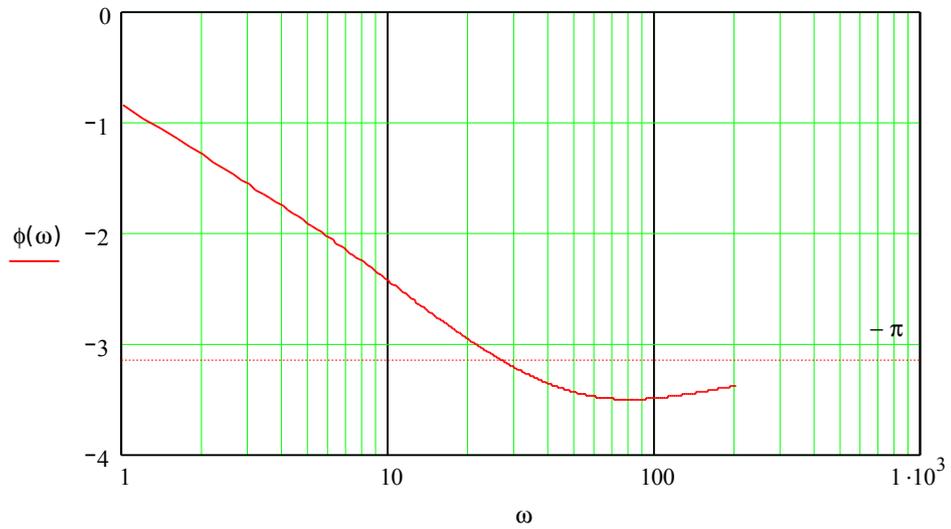
$$L_a(\omega) = 20 \log(K_{п.н}) - 20 \log(T_3 \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{T_3} \right) - 20 \log(T_1 \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{T_1} \right) - 20 \log(T_{oc} \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{T_{oc}} \right) + 20 \log(\tau_2 \omega) \cdot \left(\omega > \frac{1}{\tau_2} \right)$$

Графики асимптотической и точной ЛАЧХ:



$$\phi(\omega) = \arg\left(\frac{k_{1.H}}{1+j\cdot T_1\cdot\omega}\right) + \arg(1+j\cdot\tau_2\cdot\omega) + \arg\left(\frac{k_3}{1+j\cdot T_3\cdot\omega}\right) + \arg\left(\frac{k_{oc}}{1+j\cdot T_{oc}\cdot\omega}\right)$$

График ЛФЧХ:



Поиск частоты среза и переворота фазы:

$x=2\epsilon$	giver	$L(x) = \epsilon$	$\omega_{\epsilon p} = \text{find}(x)$	$\omega_{\epsilon p} = 16.63$
$x=3\epsilon$	giver	$\phi(x) = -\pi$	$\omega_{\pi} = \text{Find}(x)$	$\omega_{\pi} = 26.077$

Запас устойчивости по амплитуде в дБ и фазе в град:

$$\Delta := |L(\omega_p)| \quad \Delta = 8$$

$$\Delta\phi := \left| -\pi - \phi(\omega_{cp}) \right| \cdot \frac{180}{\pi} \quad \Delta\phi = 7.77$$

Расчет амплитудной и вещественной частотных характеристик замкнутой САУ. Определение показателей качества регулирования

Общее выражение амплитудно-частотной характеристики замкнутой САУ имеет вид:

$$A(\omega) = |H_{gr}(j\omega)|$$

а выражение вещественной частотной характеристики замкнутой САУ имеет вид:

$$P(\omega) = \operatorname{Re}[H_{gr}(j\omega)]$$

Выражение частотной передаточной функции замкнутой САУ, с коэффициентом передачи $K_{p,гр}$, будет иметь вид:

$$H_{gr}(j\omega) = \frac{\frac{k_{1,н}}{T_1 p + 1} \cdot W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega)}{1 + \frac{k_{1,н}}{T_1 p + 1} \cdot W_2(j\omega) \cdot W_3(j\omega) \cdot W_{oc}(j\omega)}$$

Частота собственных колебаний системы ω_0 в переходной характеристике может быть определена по максимуму АЧХ, а показатель колебательности – как отношение $A(\omega_0)/A(0)$. Перерегулирование определяется по ВЧХ согласно выражению:

$$\sigma \leq \frac{1,18P(\omega_0) + 0,277|P_{\min}| - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%$$

Воспользуемся ПО Mathcad для вышеуказанных расчетов:

Функция АЧХ системы и ее производная:

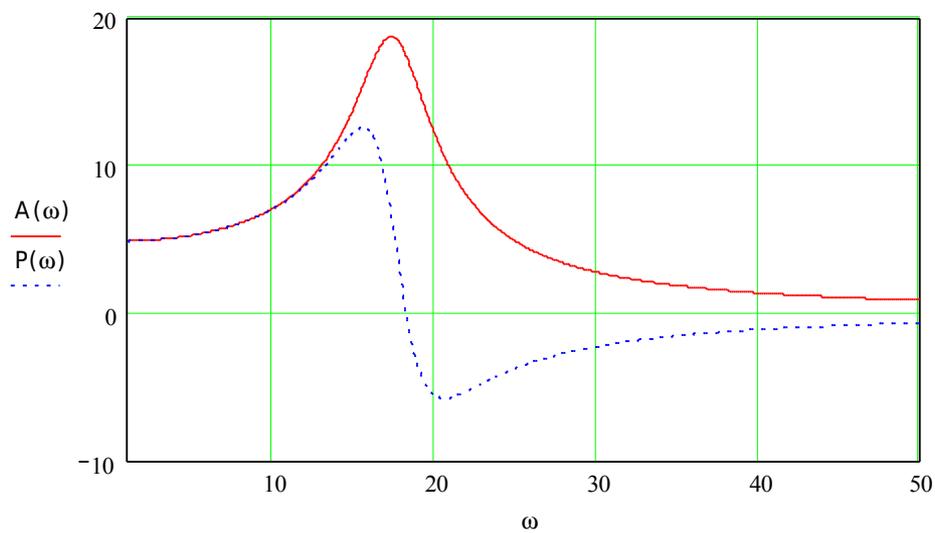
$$A(\omega) := \left| \frac{\frac{k_{1,н} k_3 (\tau_2 j \cdot \omega + 1)}{(T_1 j \cdot \omega + 1) \cdot (T_3 j \cdot \omega + 1)}}{1 + \frac{k_{1,н} k_3 k_{oc} (\tau_2 j \cdot \omega + 1)}{(T_1 j \cdot \omega + 1) \cdot (T_3 j \cdot \omega + 1) \cdot (T_{oc} j \cdot \omega + 1)}} \right| \quad \rho A(\omega) := \frac{d}{d\omega} A(\omega)$$

Функция ВЧХ системы и ее производная:

$$P(\omega) := \operatorname{Re} \left[\frac{\frac{k_{1.H} k_3 (\tau_2 j \cdot \omega + 1)}{(T_1 j \cdot \omega + 1) \cdot (T_3 j \cdot \omega + 1)}}{1 + \frac{k_{1.H} k_3 k_{OC} (\tau_2 j \cdot \omega + 1)}{(T_1 j \cdot \omega + 1) \cdot (T_3 j \cdot \omega + 1) \cdot (T_{OC} j \cdot \omega + 1)}} \right]$$

$$pP(\omega) := \frac{d}{d\omega} P(\omega)$$

Графики АЧХ и ВЧХ системы



Поиск резонансной частоты:

$$x = 17 \quad \text{given} \quad 0 = pA(x) \quad \omega_0 = \operatorname{find}(x) \quad \omega_0 = 17.28$$

Максимальное значение АЧХ:

$$A_{\max} = A(\omega_0) \quad A_{\max} = 18.706$$

Показатель колебательности:

$$M := \frac{A_{\max}}{A(0)} \quad M = 3.858$$

Поиск частоты максимума ВЧХ:

$$x=15 \quad \text{Given} \quad 0 = p(x) \quad \alpha_{\max} = \text{find}(x) \quad \alpha_{\max} = 15.536$$

Максимум ВЧХ:

$$P_{\max} = P(\alpha_{\max}) \quad P_{\max} = 12.568$$

Поиск частоты минимума ВЧХ:

$$x=15 \quad \text{Given} \quad 0 = p(x) \quad \alpha_{\min} = \text{Find}(x) \quad \alpha_{\min} = 20.563$$

Минимум ВЧХ:

$$P_{\min} = P(\alpha_{\min}) \quad P_{\min} = -5.771$$

Максимальное перерегулирование в процентах:

$$\sigma = \frac{1.18P_{\max} + 0.277|P_{\min}| - P(0)}{P(0)} \cdot 100$$

← 238.82

Расчет переходных характеристик САУ по задающему и возмущающему воздействиям

Общее выражение переходных характеристик по задающему и возмущающему воздействиям будет иметь вид соответственно:

$$y_{g1}(t) = y_{g1.уст.} + y_{g1.cb}(t);$$

$$y_f(t) = y_{f.уст.} + y_f(t),$$

где $y_{g1.уст.}$, $y_{f.уст.}$ – установившиеся значения выходного сигнала при воздействии сигналов задания и возмущения соответственно; $y_{g1.cb}(t)$, $y_{f.cb}(t)$ – функции свободного изменения выходного сигнала, обусловленные воздействием сигналов задания и возмущения соответственно.

Установившиеся значения выходного сигнала САУ при действии задания и возмущения могут быть определены из выражений соответствующих передаточных функций:

$$y_{g1.ycm} = g_1 \cdot H_{g1}(0);$$

$$y_{f.ycm} = y_{g1.ycm} - H_f(0).$$

Функции свободного изменения выходного сигнала САУ при действии задания и возмущения могут быть определены при использовании теоремы разложения, применительно к изображениям по Лапласу этих функций:

$$Y_{g1.cс}(p) = \frac{g_1}{p} \cdot H_{g1}(p) = g_1 \cdot \frac{B(p)}{pD(p)} = g_1 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{B(p_k)}{p_k \cdot D'(p_k)} e^{p_k t};$$

$$Y_{f.cс}(p) = \frac{f}{p} \cdot H_f(p) = f \cdot \frac{C(p)}{pD(p)} = f \cdot \sum_{k=0}^n \frac{C(p_k)}{p_k \cdot D'(p_k)} e^{p_k(t-t_0)},$$

где $B(p)$, $C(p)$ – числители передаточных функций $H_{g1}(p)$, $H_f(p)$; $D'(p) = \frac{d}{dp} D(p)$; p_k – k -й корень характеристического уравнения системы; n – степень полинома $D(p)$; $t_0 = 0,1$ с. – момент времени появления возмущения на соответствующем входе САУ (см. рис. 1).

Воспользуемся ПО Mathcad для определения переходных характеристик системы и построения их графиков:

числитель передаточной функции замкнутой системы по задающему воздействию с измененными параметрами:

$$B(p) = k_1 \cdot H \cdot k_3 \cdot (\tau_2 \cdot p + 1) \cdot (T_{oc} \cdot p + 1)$$

Характеристический полином системы с измененными параметрами:

$$D(p) = T_{oc} \cdot T_1 \cdot T_3 \cdot p^3 + (T_{oc} \cdot T_3 + T_{oc} \cdot T_1 + T_1 \cdot T_3) \cdot p^2 + (k_1 \cdot H \cdot k_3 \cdot k_{oc} \cdot \tau_2 + T_{oc} + T_3 + T_1) \cdot p + k_1 \cdot H \cdot k_3 \cdot k_{oc} + 1$$

определение корней характеристического уравнения САУ:

$$P = D(p) \text{ solve, } p \rightarrow \begin{bmatrix} -39.622915046619791373 \\ (-2.41076469891232653 \pm 17.42036188167176715i) \\ (-2.41076469891232653 \mp 17.42036188167176715i) \end{bmatrix}$$

Производная функция от характеристического полинома системы:

$$D'(p) = \frac{d}{dp} D(p)$$

Установившееся значение выходного сигнала при действии задающего g_1 :

$$y_{g1.yc\tau} = g_1 \cdot \frac{B(0)}{D(0)} \quad y_{g1.yc\tau} = 24.51$$

Переходная функция САУ по задающему воздействию:

$$y_{g1}(t) := y_{g1.уст} + g_1 \cdot \sum_{k=0}^2 \frac{B(P_k) \cdot \exp(P_k \cdot t)}{P_k \cdot D'(P_k)}$$

Поиск максимального значения выходного сигнала при подаче задающего g_1 :

$$p_{y_{g1}}(t) := \frac{d}{dt} y_{g1}(t)$$

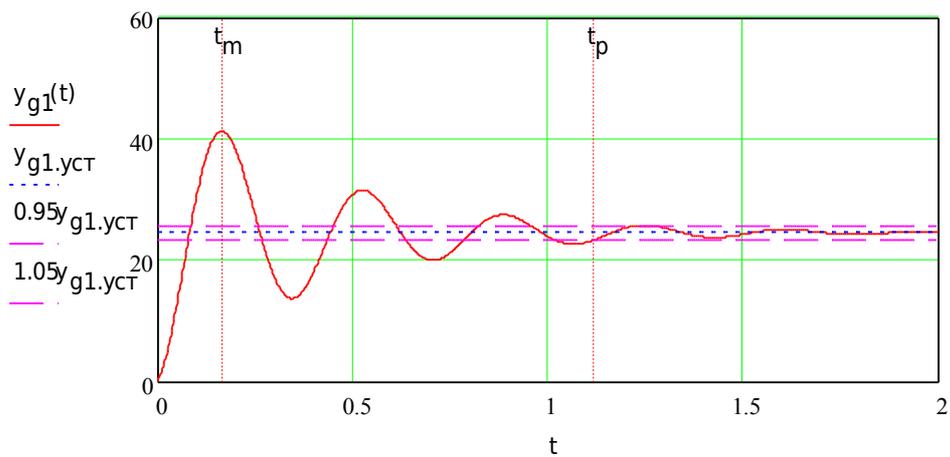
$$t_x := 0.1; \quad \text{Given} \quad 0 = p_{y_{g1}}(t_x) \quad t_m := \text{Find}(t_x) \quad t_m = 0.166$$

$$y_{g1.max} := y_{g1}(t_m) \quad y_{g1.max} = 41.235$$

Поиск времени переходного процесса при подаче задающего воздействия:

$$y := 1.2; \quad \text{Given} \quad 0.95 y_{g1.уст} = y_{g1}(t_x) \quad t_p := \text{Find}(t_x) \quad t_p = 1.119$$

График переходной характеристики САУ по задающему воздействию:



Поиск периода и частоты собственных колебаний системы:

$$t_{x>0.0r} \quad \text{Given} \quad y_{g1.уст} = y_{g1}(t) \quad t_1 = \text{Find}(t) \quad t_1 = 0.084$$

$$t_{x>0.4} \quad \text{Given} \quad y_{g1.уст} = y_{g1}(t) \quad t_2 = \text{Find}(t) \quad t_2 = 0.444$$

$$T_K = t_2 - t_1 \quad T_K = 0.361$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_K} \quad \omega_0 = 17.418$$

Перерегулирование:

$$\sigma_w = \frac{y_{g1.max} - y_{g1.уст}}{y_{g1.уст}} \cdot 100 \quad \leftarrow 68.24$$

Очевидно, что величина перерегулирования меньше максимального значения, полученного при анализе АЧХ и ВЧХ системы.

Аналогичным способом получим функцию и вид переходной характеристики системы по возмущающему воздействию:

Числитель передаточной функции замкнутой системы по возмущению:

$$C(p) = k_3 \cdot (T_{oc} \cdot p + 1) \cdot (T_1 \cdot p + 1)$$

$t_1 = 10$ - заданный сигнал возмущения системы;

$t_0 = 0.1$ - момент времени появления возмущения системы;

$$y_{f.уст} = f \cdot \frac{C(0)}{D(0)} \quad y_{f.уст} = 1.511$$

Установившееся значение выходного сигнала при воздействии возмущения и нулевом сигнале управления:

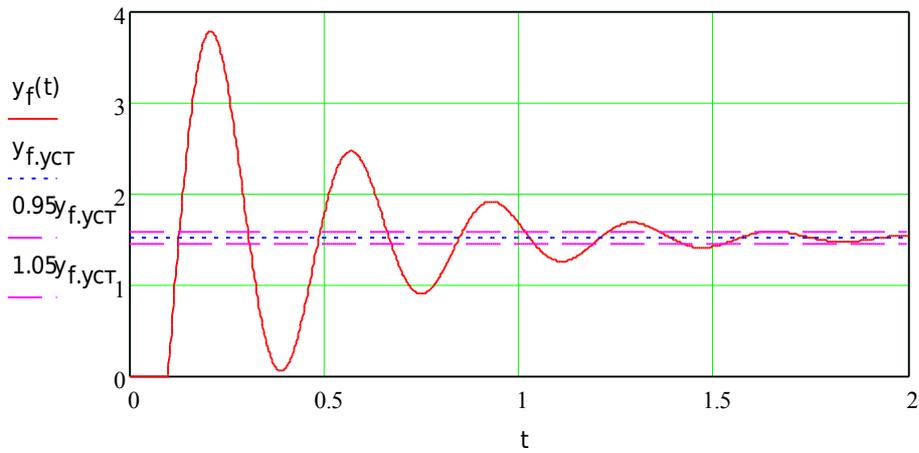
Функция свободного изменения выходного сигнала при воздействии возмущения:

$$y_{f,св}(t) = f \cdot \sum_{k=0}^2 \frac{C(P_k) \cdot \exp[P_k \cdot (t - t_0)]}{P_k \cdot D'(P_k)}$$

Функция переходной характеристики системы при появлении возмущения в момент времени t_0

$$y_f(t) = f(t - t_0) \cdot y_{f,уст} + y_{f,св}(t)$$

График переходной характеристики системы по возмущающему воздействию



Синтез последовательного корректирующего устройства

Синтез корректирующего устройства произведем при помощи логарифмических частотных характеристик. В соответствии с этим методом ЛАЧХ корректирующего устройства определяется выражением:

$$G_{\text{ж}}(\omega) \approx G_{\text{ис}}(\omega) \approx G_{\text{ж}}(\omega)$$

где $G_{\text{ж}}(\omega)$, $G_{\text{ис}}(\omega)$ – соответственно ЛАЧХ желаемая и исходная исследуемой САУ.

Воспользуемся номограммами Солодовникова, изображенными на рисунке 2, для построения желаемой ЛАЧХ САУ при заданных перерегулировании $\sigma = 25\%$ и времени переходного процесса $t_{\text{пер}} = 0,2$ с.

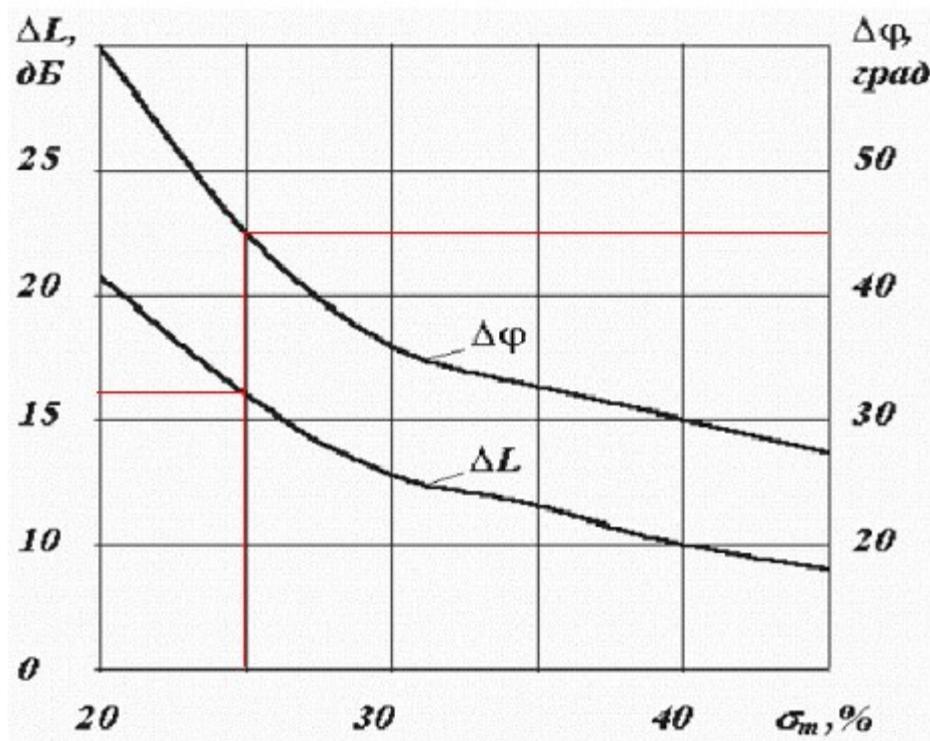
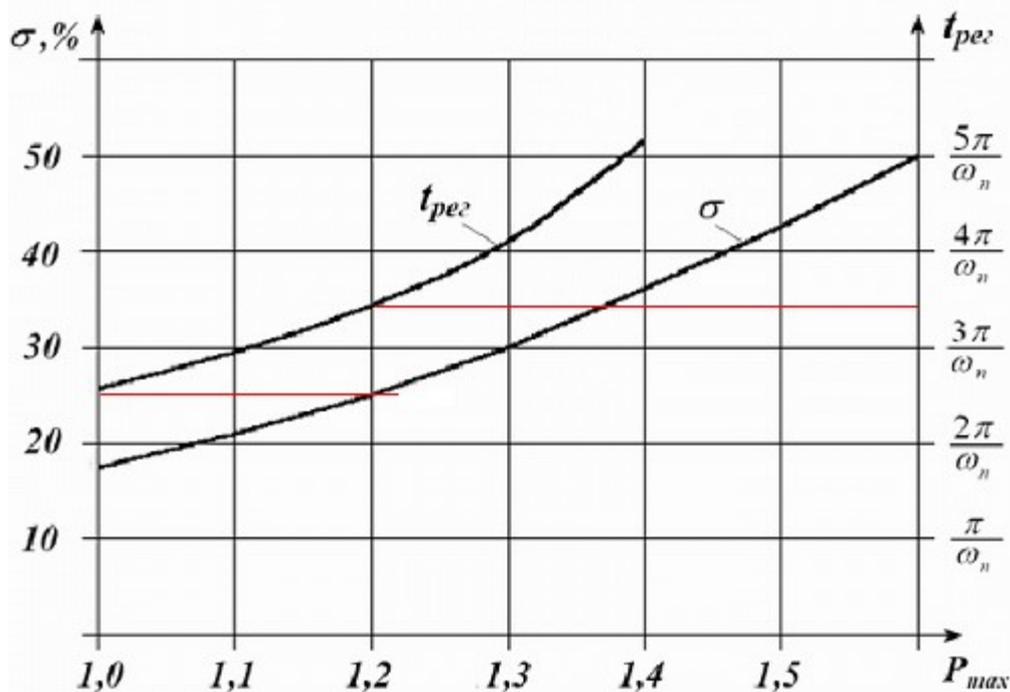


Рисунок 2. Номограммы Солодовникова

Из номограмм найдем частоту среза, запасы устойчивости по амплитуде и фазы для желаемой ЛАЧХ:

$$\omega_{cp1} = (0,6 \div 0,9) \cdot \frac{3,4\pi}{t_{\text{пер}}} = 0,9 \cdot \frac{3,4\pi}{t_{n.n}} = 0,9 \cdot \frac{3,4\pi}{0,2} = 48,006 \text{ с}^{-1};$$

$$\Delta L_{\text{жс}} = 16 \text{ дБ};$$

$$\Delta \varphi_{\text{жс}} = 45 \text{ град.}$$

Поскольку среднечастотная асимптота желаемой ЛАЧХ должна иметь наклон -20 дб/дек и проходить через точку $(\omega_{cp1}, 0)$, то ее выражение будет иметь вид:

$$L_{ж.сч}(\omega) = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_{cp1}}\right).$$

Частота сопряжения ω_1 низкочастотной и среднечастотной желаемой ЛАЧХ определяется решением уравнения:

$$20 \log(K_{p.n}) = L_{ж.сч}(\omega_1).$$

Для обеспечения желаемого запаса устойчивости $\Delta L_{ж}$ необходимо найти частоту сопряжения ω_2 , которая удовлетворяет уравнению:

$$\Delta L_{ж} = L_{ж.сч}(\omega_2).$$

Частоты сопряжения высокочастотных асимптот со среднечастотной областью желаемой ЛАЧХ можно предварительно задать, исходя из неравенства:

$$\omega_4 > \omega_3 > \omega_{cp1};$$

$$\omega_3 = 400; \omega_4 = 600.$$

Таким образом, выражение асимптотической желаемой ЛАЧХ разомкнутой системы будет иметь вид:

$$L_{ж} = 20 \log(K_{p.n}) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot (\omega > \omega_1) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \cdot (\omega > \omega_2) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right) \cdot (\omega > \omega_3) -$$

$$- 60 \log\left(\frac{\omega}{\omega_4}\right) \cdot (\omega > \omega_4).$$

Воспользуемся ПО Mathcad для определения и построения желаемой ЛАЧХ системы и ЛАЧХ корректирующего устройства:

Частота среза среднечастотной асимптоты:

$$\omega_{cp1} = 0.9 \frac{3.4 \pi}{t_{п.п}} \quad \omega_{cp1} = 48.066$$

Запас устойчивости желаемой ЛАЧХ:

$$L_g = 16$$

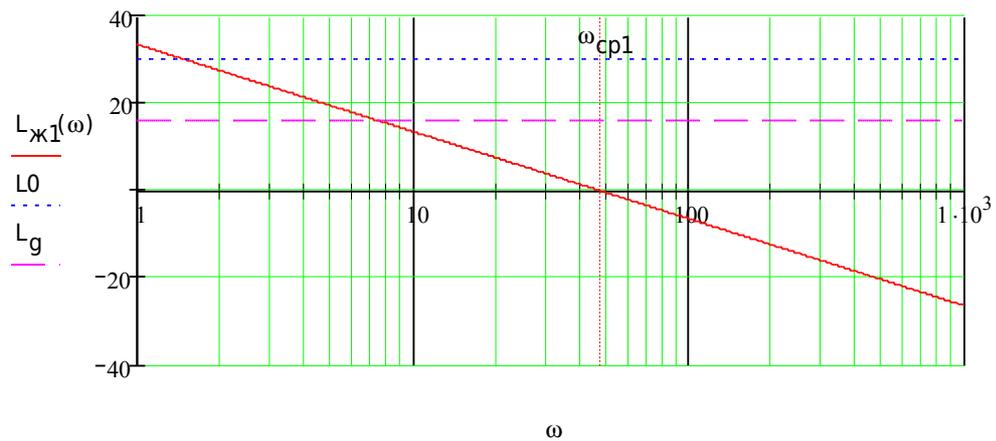
Максимально допустимый уровень низкочастотной области желаемой ЛАЧХ:

$$L_0 = 20 \log(K_{p.n})$$

Выражение среднечастотной асимптоты желаемой ЛАЧХ:

$$L_{ж1}(\omega) = -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_{cp1}}\right)$$

График к определению частот сопряжения областей желаемой ЛАЧХ:



Поиск частот сопряжения областей желаемой ЛАЧХ:

$$\alpha = 3.0$$

$$\text{Given } L_0 = L_{Ж1}(\omega) \quad \omega_1 = \text{Find}(\alpha) \quad \omega_1 = 1.498$$

$$\text{Given } L_g = L_{Ж1}(\omega) \quad \omega_2 = \text{Find}(\alpha) \quad \omega_2 = 7.618$$

Предварительные значения частот сопряжения высокочастотной области желаемой ЛАЧХ:

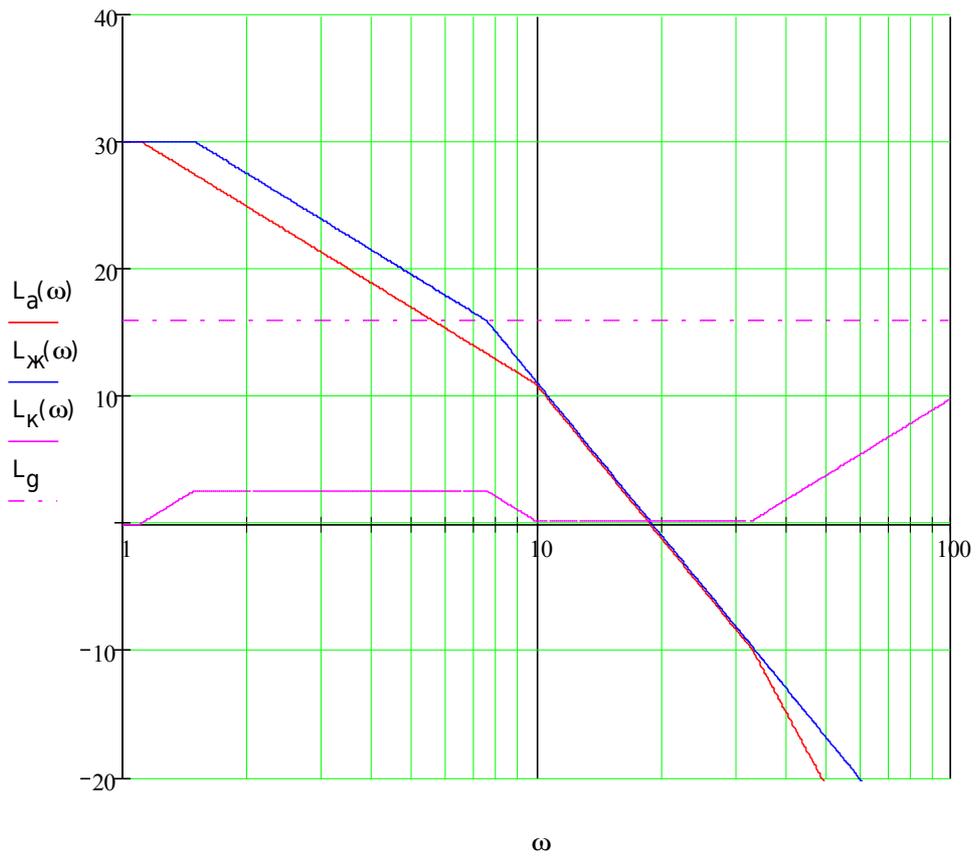
$$\omega_3 = 400 \quad \omega_4 = 600$$

Определение выражений желаемой ЛАЧХ и ЛАЧХ корректирующего устройства:

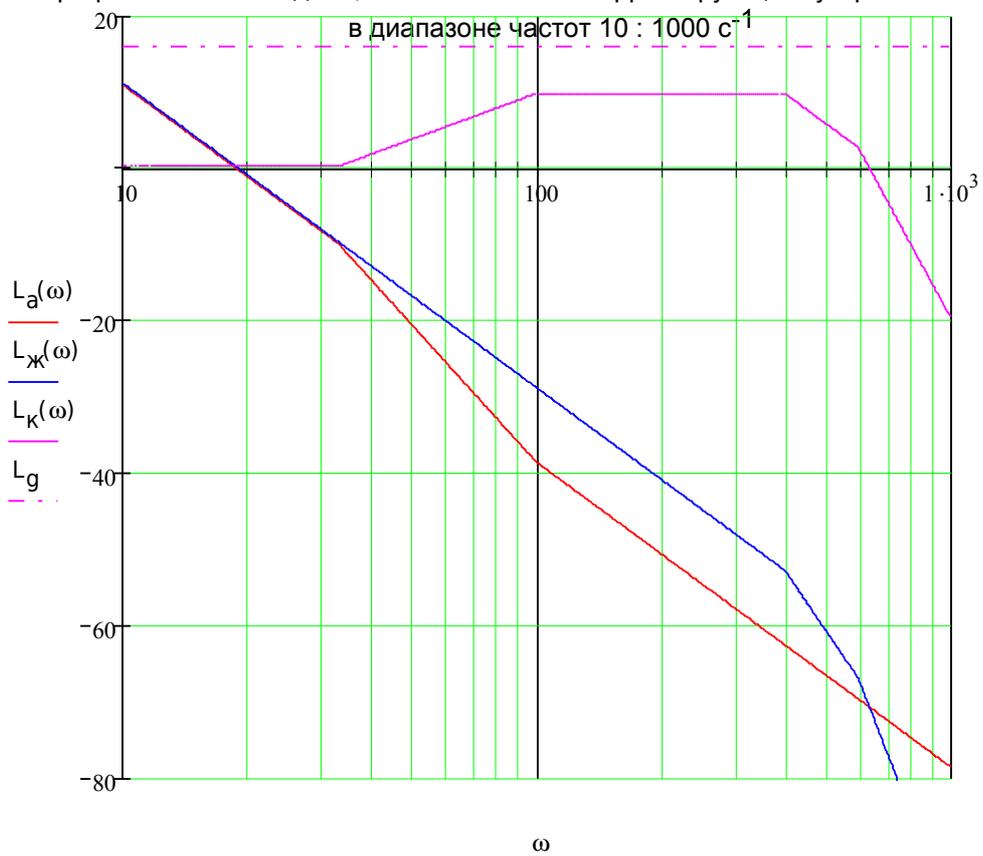
$$L_{Ж}(\omega) = L_0 - 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) (\omega > \omega_1) - 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) (\omega > \omega_2) - 40 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right) (\omega > \omega_3) - 60 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_4}\right) (\omega > \omega_4)$$

$$L_k(\omega) = L_{Ж}(\omega) - L_a(\omega)$$

Графики ЛАЧХ исходной, желаемой САУ и корректирующего устройства в диапазоне частот 1 : 100 с⁻¹



Графики ЛАЧХ исходной, желаемой САУ и корректирующего устройства в диапазоне частот 10 : 1000 с⁻¹



Определение постоянных времени звеньев корректирующего устройства согласно виду ЛАЧХ:

$$\tau_{k1} = T_3 \quad T_{k1} = \frac{1}{\omega_1} \quad T_{k2} = \frac{1}{\omega_2} \quad \tau_{k2} = T_1 \quad \tau_{k3} = T_{oc} \quad T_{k3} = \tau_2 \quad T_{k4} = \frac{1}{\omega_3} \quad T_{k5} = \frac{1}{\omega_4}$$

Выражение передаточной функции корректирующего устройства:

$$W_k(p) = \frac{(1 + \tau_{k1}p) \cdot (1 + \tau_{k2}p) \cdot (1 + \tau_{k3}p)}{(1 + T_{k1}p) \cdot (1 + T_{k2}p) \cdot (1 + T_{k3}p) \cdot (1 + T_{k4}p) \cdot (1 + T_{k5}p)}$$

Выражения передаточных функций скорректированной разомкнутой САУ:

$$W_{cg}(p) = \frac{k_{1.H} k_3 (1 + \tau_2 p)}{(1 + T_1 p) \cdot (1 + T_3 p)} \cdot W_k(p)$$

$$W_{cgz}(p) = \frac{k_{1.H} k_3 k_{oc} (1 + \tau_2 p)}{(1 + T_1 p) \cdot (1 + T_3 p) \cdot (1 + T_{oc} p)} \cdot W_k(p)$$

Выражения передаточной функции скорректированной замкнутой САУ:

$$H_{cg}(p) = \frac{W_{cg}(p)}{1 + W_{cgz}(p)}$$

Общее и адаптированное изображения по Лапласу выходного сигнала скорректированной САУ:

$$Y(p) = \frac{g_1}{p} \cdot H_{cg}(p)$$

$$Y(p) = Y(p) \left| \begin{array}{l} \text{convert} \\ \text{parfrac} \\ \text{float,3} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-.906}{p + 599.} + \frac{1.9522}{p + 403.} + \frac{24.5}{p} - .274e7 \frac{(-.188e-4 + .933e-5p)}{p^2 + 7.56p + 376.}$$

Выражение временной функции выходного сигнала скорректированной САУ при подаче управляющего воздействия:

$$y_{g11}(t) = Y(p) \Big|_{\text{float,3}} \rightarrow (-906) \cdot e^{(-599) \cdot t} + 1.95e^{(-403) \cdot t} + 24.5 - 25.6e^{(-3.78) \cdot t} \cdot \cos(19.0t) + 7.79e^{(-3.78) \cdot t} \cdot \sin(19.0t)$$

Поиск максимального и установившегося значения функции выходного сигнала:

$$p y_{g11}(t) = \frac{d}{dt} y_{g11}(t)$$

$$kx=0.1; \quad \text{Given} \quad 0 = p y_{g11}(tx) \quad tx_m = \text{Find}(tx) \quad t_m = 0.139$$

$$y_{g11.max} = y_{g11}(t_m) \quad y_{g11.max} = 39.991$$

$$y_{g11.ycr} = y_{g11}(0) \quad y_{g11.ycr} = 24.51$$

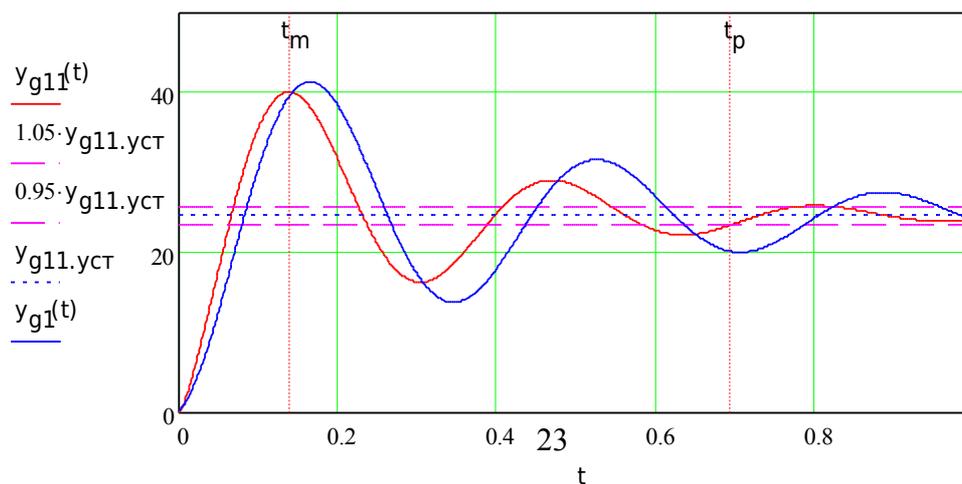
Перерегулирование:

$$\sigma_{\%} = \frac{y_{g11.max} - y_{g11.ycr}}{y_{g11.ycr}} \cdot 100 \quad \leftarrow 63.165$$

Время регулирования:

$$kx=0.1; \quad \text{Given} \quad 0.95 y_{g11.ycr} = y_{g11}(tx) \quad tx_p = \text{Find}(tx) \quad t_p = 0.693$$

График функции выходного сигнала скорректированной и нескорректированной САУ:



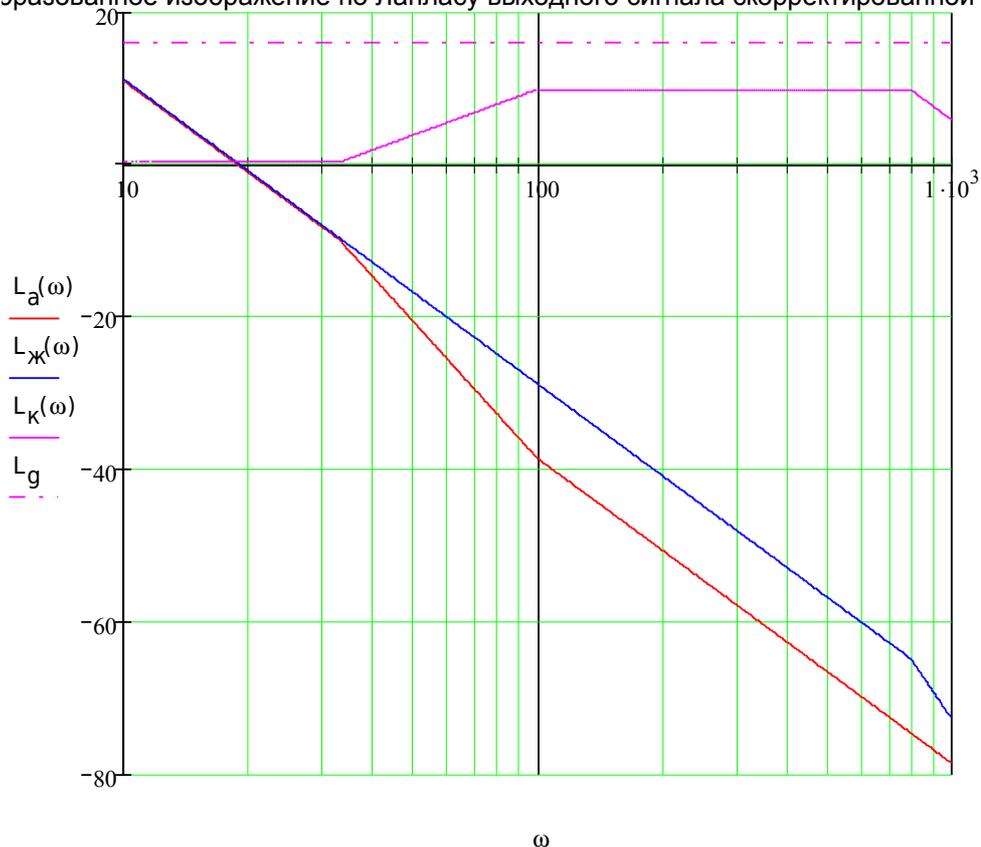
Расчет показывает, что заданные показатели качества регулирования не достигнуты, хотя и улучшены в сравнения с таковыми у САУ без корректирующего устройства.

Заданное значение перерегулирование (25%) не может быть достигнуто путем коррекции приведенным способом, поскольку постоянная времени звена обратной связи T_{OC} не является наименьшей в сравнении с постоянными времени других звеньев. Таким образом, нужно выбрать такое соотношение сопрягающих частот ω_3 , ω_4 , чтобы обеспечивалось требуемое время регулирования. Повторим расчет при помощи ПО Mathcad для подобранных значений частот ω_3 , ω_4 :

$$\omega_3 = 800 \quad \omega_4 = 1000$$

Графики ЛАЧХ исходной, желаемой САУ и корректирующего устройства в диапазоне частот $10 : 1000 \text{ с}^{-1}$

Преобразованное изображение по Лапласу выходного сигнала скорректированной САУ:



$$Y(p) = Y(p) \left| \begin{array}{l} \text{convertparfrac} \\ \text{float,3} \end{array} \right. \rightarrow \frac{-1.11}{p+999.} + \frac{1.70}{p+802.} + \frac{24.5}{p} - .913e7 \frac{(-.582e-9) + .275e-5p}{p^2 + 8.28p + 377.}$$

Выражение временной функции выходного сигнала скорректированной САУ при подаче управляющего воздействия:

$$y_{g11}(t) = Y(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplac} \\ \text{float,3} \end{array} \right. \rightarrow (-1.11) \cdot e^{(-999.) \cdot t} + 1.70e^{(-802.) \cdot t} + 24.5 - 25.1e^{(-4.14) \cdot t} \cdot \cos(19.0t) + 8.28e^{(-4.14) \cdot t} \cdot \sin(19.0t)$$

Поиск максимального и установившегося значения функции выходного сигнала:

$$p y_{g11}(t) = \frac{d}{dt} y_{g11}(t)$$

$$\begin{aligned} & \text{ss} = 0.1; \quad \text{Given} \quad 0 = p y_{g11}(t) \quad t_m = \text{Find}(t) \quad t_m = 0.137 \\ & y_{g11.\text{max}} = y_{g11}(t_m) \quad y_{g11.\text{max}} = 37.971 \\ & y_{g11.\text{уст}} = g_1 + H_{cg}(0) \quad y_{g11.\text{уст}} = 24.51 \end{aligned}$$

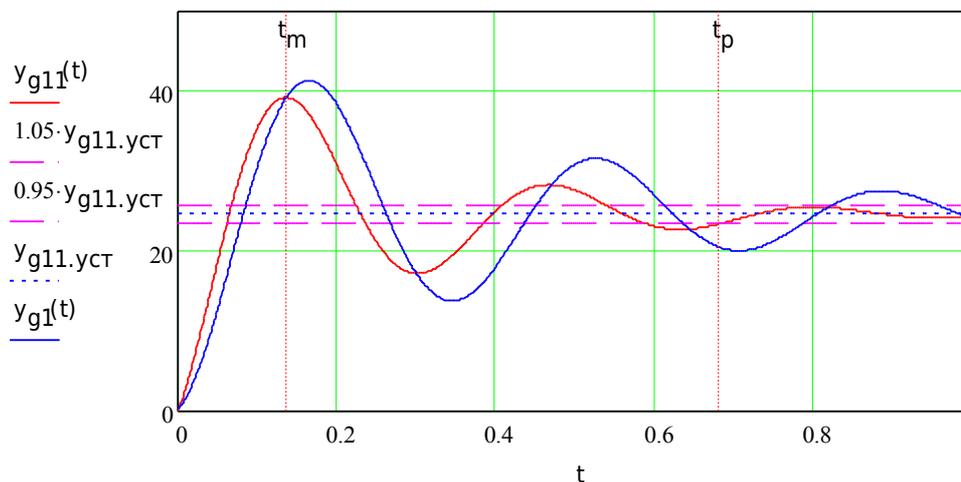
Перерегулирование:

$$\sigma = \frac{y_{g11.\text{max}} - y_{g11.\text{уст}}}{y_{g11.\text{уст}}} \cdot 100 \quad \sigma = 59.644$$

Время регулирования:

$$\text{ss} = 0.1; \quad \text{Given} \quad 0.95 y_{g11.\text{уст}} = y_{g11}(t) \quad t_p = \text{Find}(t) \quad t_p = 0.681$$

График функции выходного сигнала скорректированной и исходной САУ:



Очевидно, что увеличение сопрягающих частот ω_3 , ω_4 приводит к уменьшению перерегулирования и времени регулирования, но незначительно. Таким образом, заданные параметры регулирования не достижимы при помощи выполненной коррекции системы.

Перечень используемой литературы

1. Теория систем автоматического регулирования. Бесекерский В. А., Попов Е. П., издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1972, 768 стр.
2. Беседы по автоматике. Голубничий Н. И., Зайцев Г. Ф., Иващенко М. А., Чинаев П. И., Чумаков Н. М. «Техника», 1971, 232 стр.